

WALTER HUMBERTO SUBIZA PIÑA

**A DETERMINAÇÃO DE UM MODELO
GEOIDAL DE PRECISÃO PARA O URUGUAI**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, do Setor de Ciências da Terra, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientadores:

Prof. Dr. Camil Gemael

Prof. Dr. Nelsí Cogo de Sá

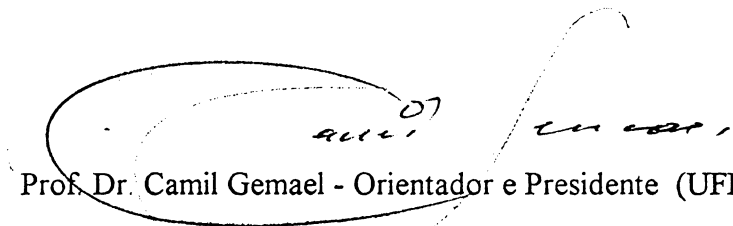
**CURITIBA
2000**

**“A DETERMINAÇÃO DE UM MODELO GEOIDAL
DE PRECISÃO PARA O URUGUAI”**

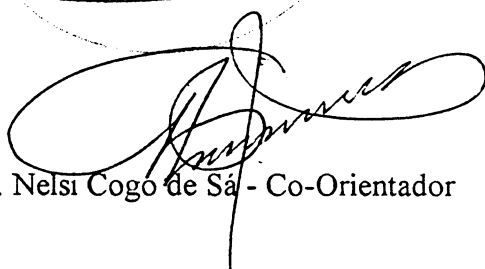
POR

WALTER HUMBERTO SUBIZA PIÑA


Tese nº 015 aprovada como requisito parcial do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:




Prof. Dr. Camil Gemael - Orientador e Presidente (UFPR)



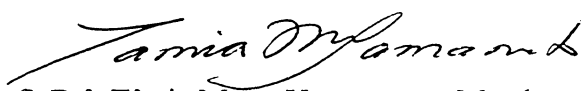
Prof. Dr. Nelsi Cogo de Sá - Co-Orientador (IAG/USP)



Prof. Dr. Denizar Blitzkow – Membro (POLI/USP)



Prof. Dr. Mauro Andrade de Souza – Membro (Observatório Nacional)



Prof. Dr.ª Tâmia Marta Yamamoto - Membro (UTP)

A DETERMINAÇÃO DE UM MODELO GEOIDAL DE PRECISÃO PARA O URUGUAI

POR

WALTER HUMBERTO SUBIZA PIÑA

Tese no. , aprovada como requisito parcial do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:

Dr. Camil Gemaël

UFPr

Dr. Denizar Blitzkow

USP

Dr. Nelsí Cogo de Sá

USP

Dr. Claudio Brunini

ULP

Dr. Silvio Rogério Correia de Freitas

UFPr

Curitiba, Junho 2000

DEDICATÓRIA

A meu pai (in memoriam), do qual não pude me despedir como houvesse gostado e a minha mãe pela sua constante luta na vida.

A minha esposa, pelo apoio e incentivo, nas muitas horas que o trabalho nos separou e pelas coisas que deixamos de fazer ou aproveitar.

A minhas filhas.

Ao Dr. Georg Wenzel (in memoriam), pelo generoso suporte.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não houve-se sido possível, sem a colaboração de numerosas pessoas e instituições.

Especialmente agradeço ao SGM, que forneceu os dados principais, fruto do trabalho de várias gerações de profissionais e verdadeira riqueza patrimonial e que brindou-me, pertencendo aos seus quadros de pessoal, a oportunidade de enriquecer minha vida.

À SubComissão para a Gravidade e o Geóide para América do Sul (Dr. Denizar Blitzkow), ao Instituto Astronômico e Geofísico da USP (Dr. Nelsí Cogo de Sá), ao Bureau Gravimétrique Internationale (Dr. Gilles Balma) e a Universidade de Cambridge (Dr. Chenway Hwang), pelo fornecimento de dados gravimétricos e topográficos e o suporte fornecido.

Aos professores da Segunda Escola do Geóide, Michael Sideris, Nikos Pavlis, René Forsberg e Fernando Sansò, pelas ensinanças, dados e suporte.

Ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, pela qualidade do seu ensino, e dedicação dos seus professores.

A meus orientadores, pela sua tarefa realizada e a paciência demonstrada na correção dos meus trabalhos.

Ao CNPq, pelo apoio parcial recebido na forma de uma bolsa de doutorado.

SUMÁRIO

	página
SUMÁRIO.....	v
LISTA DE FIGURAS.....	x
LISTA DE TABELAS.....	xiv
LISTA DE SIGLAS.....	xvi
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xviii
CONVENÇÕES USADAS.....	xxi
RESUMO.....	xxii
ABSTRACT.....	xxiii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS CONCEITUAIS.....	3
2.1 INTRODUÇÃO.....	3
2.2 POTENCIAL DA GRAVIDADE REAL.....	4
2.3 POTENCIAL DA GRAVIDADE NORMAL.....	6
2.4 POTENCIAL ANÔMALO OU PERTURBADOR.....	7
2.5 ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS.....	8
2.6 A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO VALOR DE CONTORNO PARA O GEÓIDE E A FÓRMULA DE STOKES.....	12
2.7 CORREÇÕES GRAVIMÉTRICAS.....	14
2.7.1 A correção atmosférica à gravidade observada.....	15
2.7.2 As massas terrestres e oceânicas.....	16
2.8 A TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE N	20
2.9 A APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER NO CÁLCULO DO GEÓIDE.....	23
2.9.1 A fórmula de Stokes.....	23
2.9.1.1 A fórmula de Stokes para o plano.....	24
2.9.1.2 A fórmula de Stokes para a esfera.....	26
2.9.1.2.1 O núcleo esférico aproximado.....	26
2.9.1.2.2 O núcleo esférico rigoroso.....	27
2.9.2 Os efeitos do relevo topográfico.....	28
2.9.2.1 O programa <i>tc2dftpl</i>	28

2.9.2.2	O programa <i>tc</i>	31
2.9.2.2.1	Cálculo do efeito do relevo topográfico usando prismas.....	31
2.9.2.2.2	Cálculo do efeito do relevo topográfico pelas fórmulas de Mc Millan.....	32
2.9.2.3	O programa <i>tcfour</i>	34
2.9.2.4	O efeito indireto, o programa <i>ind</i>	35
2.10	AVALIAÇÃO DE MODELOS GEOIDAIIS.....	36
CAPÍTULO 3 – DESCRIÇÃO DOS DADOS DISPONÍVEIS.....		38
3.1	RELAÇÃO DOS DADOS E RESPECTIVAS FONTES.....	40
3.1.1	Modelos geopotenciais.....	40
3.1.1.1	EGM96.....	40
3.1.1.2	GPM98CR.....	40
3.1.2	Dados gravimétricos.....	40
3.1.2.1	Locais (Uruguai).....	40
3.1.2.2	Regionais (Argentina, Brasil, Paraguai, Oceano Atlântico).....	40
3.1.3	Dados do relevo topográfico.....	41
3.1.3.1	Locais (Marinhos e terrestres).....	41
3.1.3.2	Dados regionais.....	41
3.1.4	Dados de controle dos modelos geoidais.....	41
3.2	CONSIDERAÇÕES ACERCA DOS DADOS.....	41
3.2.1	Modelos geopotenciais.....	41
3.2.2	Dados gravimétricos.....	42
3.2.3	Dados do relevo topográfico.....	44
3.2.4	Dados de controle dos modelos geoidais.....	46
3.3	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	49
3.4	CONSTANTES USADAS NESTE TRABALHO.....	51
3.4.1	Constantes gerais e convenções.....	51
3.4.2	Sistema geodésico WGS84.....	51
CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA.....		53
4.1	ETAPAS PRÉVIAS.....	53

4.2	CÁLCULOS DOS MODELOS GEOIDAIIS.....	53
4.3	AValiação E SELEÇÃO DE MODELOS GEOIDAIIS OBTIDOS.....	55
4.4	PROCEDIMENTO DETALHADO DE CÁLCULO.....	55
4.4.1	Contribuição gravimétrica.....	55
4.4.2	Contribuição topográfica.....	65
4.4.3	Modelos geoidais determinados.....	68
4.4.4	Outros testes realizados.....	73
4.4.4.1	Efeito do relevo topográfico.....	74
4.4.4.2	Testes no núcleo da fórmula de Stokes.....	75
4.4.4.3	Espaçamento de quadriculas de 10' x 10'	75
4.4.4.4	Modelo com anomalia ar-livre, calculada a partir da anomalia Bouguer.....	75
4.4.4.5	Modelo com anomalia ar-livre, calculada a partir da anomalia Bouguer, considerando o efeito indireto do relevo topográfico na gravidade.....	76
4.4.4.6	Modelo Final.....	76
4.4.5	Avaliação dos modelos geoidais.....	76
CAPÍTULO 5 – RESULTADOS.....		78
5.1	MODELOS GEOIDAIIS BASEADOS NO EGM96.....	79
5.2	MODELO GEOIDAL BASEADO NO GPM98CR.....	92
5.3	OUTROS TESTES REALIZADOS.....	98
5.3.1	O efeito direto do relevo topográfico.....	98
5.3.2	Testes no núcleo da fórmula de Stokes.....	100
5.3.3	Espaçamento de quadriculas de 10' x 10'	101
5.3.4	Modelo com anomalia ar-livre, calculada a partir da anomalia Bouguer.....	101
5.3.5	Modelo com anomalia ar-livre, calculada a partir da anomalia Bouguer, considerando o efeito indireto do terreno na gravidade.....	105
5.3.6	Modelo Final.....	107
5.4	COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES DO CAPÍTULO.....	108
5.4.1	Referentes ao cálculo dos modelos geoidais iniciais.....	108
5.4.2	Testes complementares.....	109

CAPÍTULO 6 – AVALIAÇÃO DOS MODELOS GEOIDAIIS OBTIDOS.....	101
6.1 AVALIAÇÃO ABSOLUTA.....	111
6.2 AVALIAÇÃO RELATIVA.....	117
6.3 RESUMO DA AVALIAÇÃO E ESCOLHA DO MODELO GEOIDAL.....	126
CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	130
CAPÍTULO 8 – REFERÊNCIAS.....	133
ANEXO I – A EQUAÇÃO DE LAPLACE E OS HARMÔNICOS ESFÉRICOS....	138
1 EQUAÇÃO DE LAPLACE EM COORDENADAS RETANGULARES....	138
2 EQUAÇÃO DE LAPLACE EM COORDENADAS ESFÉRICAS.....	138
3 HARMÔNICOS ESFÉRICOS.....	139
ANEXO II – A ANÁLISE ESPECTRAL E A TRANSFORMADA DE FOURIER..	141
1 INTRODUÇÃO.....	141
2 SÉRIE DE FOURIER.....	142
3 TRANSFORMADA DE FOURIER (FT – FOURIER TRANSFORM), FORMA CONTÍNUA.....	143
4 A FORMA DISCRETA DA FT.....	145
4.1 A CONVOLUÇÃO DISCRETA E A CIRCULAR.....	147
4.2 A TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER MULTIDIMENSIONAL.....	150
ANEXO III – PROGRAMAS USADOS.....	152
1 DESCRIÇÃO GERAL.....	152
2 DESCRIÇÃO DETALHADA.....	154
2.1 O PROGRAMA <i>gravt_gm</i>	154
2.2 O PROGRAMA <i>fftgeoid</i>	155
2.3 O PROGRAMA <i>tc</i>	158
2.4 O PROGRAMA <i>tcfour</i>	161
2.5 O PROGRAMA <i>tc2dftpl</i>	162

2.6	O PROGRAMA <i>ind</i>	163
2.7	O PROGRAMA <i>geopgrid</i>	163

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1 A gravidade no geóide e no elipsóide, incluindo o vetor anomalia gravimétrica.....	9
Figura 2 O método de condensação de Helmert e o co-geóide.....	17
Figura 3 Contribuições espectrais no cálculo de um modelo geoidal de precisão. Fonte: modificada de (Sideris, 1991).....	20
Figura 4 Uso da zona interior no programa <i>tc</i> . Fonte: (Forsberg, 1997).....	32
Figura 5 Modificação das altitudes do terreno na zona interior. Fonte: modificada de (Forsberg, 1997).....	34
Figura 6 Distribuição geográfica dos dados para o cálculo do modelo geoidal no Uruguai.....	39
Figura 7 Relevo topográfico a partir do MTD GTOPO30, resolução 30"x 30".....	45
Figura 8 Distribuição dos dados de controle GPS, absolutos e relativos.....	49
Figura 9 Formação do arquivo de anomalias gravimétricas. Primeira parte.....	57
Figura 10 Formação da Base de Dados Gravimétricos. Segunda parte (Combinação e processamento dos dados).....	60
Figura 11 Distribuição geográfica dos dados gravimétricos diretamente observados.....	61
Figura 12 Exemplo de análise de dados, quadricula 1.....	62
Figura 13 Formação do arquivo de anomalias gravimétricas. Terceira parte (Combinação final dos dados gravimétricos).....	63
Figura 14 Distribuição geográfica final do arquivo de anomalias gravimétricas de ar-livre.....	64
Figura 15 Anomalias gravimétricas ar-livre (intervalo de contorno: 1 mGal).....	64
Figura 16 Formação do arquivo de dados topográficos.....	65
Figura 17 Distribuição dos dados topográficos selecionados.....	67
Figura 18 Imagem do MTD com espaçamento de 2,5' x 2,5'.....	68
Figura 19 Cálculo dos modelos geoidais 1 e 2 (EGM180 e EGM360). Primeira parte, o uso do modelo geopotencial.....	69
Figura 20 Cálculo dos modelos geoidais 1 e 2 (EGM180 e EGM360). Segunda parte, uso das anomalias gravimétricas ar-livre.....	70
Figura 21 Cálculo dos modelos geoidais 1 e 2 (EGM180 e EGM360). Terceira	

	parte, uso dos dados topográficos.....	71
Figura 22	Cálculo dos modelos geoidais 1 e 2 (EGM180 e EGM360). Parte final, o emprego da técnica de decomposição da altura geoidal.....	72
Figura 23	Cálculo do modelo geoidal 4 (GPM540).....	73
Figura 24	Processo de avaliação dos modelos geoidais obtidos.....	77
Figura 25	Alturas geoidais geradas pelo modelo geopotencial EGM96 (180) (intervalo de contorno: 1 m).....	79
Figura 25a.	Alturas geoidais geradas pelo modelo geopotencial EGM96 (360) (intervalo de contorno: 1 m).....	80
Figura 26	Anomalias gravimétricas ar-livre do modelo geopotencial EGM96 (180) (intervalo de contorno: 5 mGal).....	80
Figura 26a.	Anomalias gravimétricas ar-livre do modelo geopotencial EGM96 (360) (intervalo de contorno: 1 m).....	81
Figura 27	Anomalias gravimétricas ar-livre observadas (intervalo de contorno: 5 mGal).....	82
Figura 28	Efeito direto do terreno (intervalo de contorno: 1 mGal).....	83
Figura 29	Correlação das anomalias ar-livre, de Faye e a correção de terreno, com as altitudes das estações gravimétricas.....	84
Figura 30	Anomalias gravimétricas residuais, após o processo de decomposição, modelo 1 (EGM180) (intervalo de contorno: 10 mGal).....	85
Figura 30a.	Anomalias gravimétricas residuais, após o processo de decomposição, modelo 2 (EGM360) (intervalo de contorno: 10 mGal).....	85
Figura 31	Malha de alturas geoidais residuais obtida com o programa <i>ffigeoid</i> , modelo 1 (EGM180) (intervalo de contorno: 0,2 m).....	87
Figura 31a.	Malha de alturas geoidais residuais obtida com o programa <i>ffigeoid</i> , modelo 2 (EGM360) (intervalo de contorno: 0,2 m).....	88
Figura 32	Efeito indireto do método de condensação de Helmert (intervalo de contorno: 0,25 cm).....	89
Figura 33	Alturas geoidais do modelo 1 (EGM180) (intervalo de contorno: 0,5 m)..	90
Figura 33a.	Alturas geoidais do modelo 2 (EGM360) (intervalo de contorno: 0,5 m)..	91
Figura 34	Alturas geoidais geradas pelo modelo geopotencial GPM98CR (540) (intervalo de contorno: 1 m).....	93
Figura 35	Anomalias gravimétricas ar-livre do modelo geopotencial GPM98CR	

	(540) (intervalo de contorno: 5 mGal).....	93
Figura 36	Anomalias gravimétricas residuais do modelo 4 (GPM540), após o processo de decomposição (intervalo de contorno 10: mGal).....	94
Figura 37	Malha de alturas geoidais residuais do modelo 4 (GPM540) (intervalo de contorno: 0,2 m).....	95
Figura 38	Alturas geoidais do modelo 4 (GPM540) (intervalo de contorno: 0,5 m)..	96
Figura 39	Efeito direto de terreno obtido com <i>tc2dftpl</i> (intervalo de contorno: 0,05 mGal).....	98
Figura 40	Efeito direto de terreno obtido com <i>tcfour</i> . Observe-se os valores obtidos nas bordas e o efeito na área oceânica (intervalo de contorno: 0,5 mGal).....	99
Figura 41	Diferenças entre alturas geoidais residuais, obtidas com a fórmula de Stokes com núcleo esférico original (1DFFT) e aproximação plana com anomalias médias de gravidade (opções 5 e 1 de <i>fftgeoid</i>) (Intervalo de contorno: 0,02 m).....	100
Figura 42	Diferenças entre alturas geoidais residuais, obtidas com a fórmula de Stokes com núcleo esférico original (1DFFT) e núcleo esférico modificado (2DFFT) (opções 5 e 4 de <i>fftgeoid</i>) (Intervalo de contorno: 0,01 m).....	100
Figura 43	Alturas geoidais obtidas a partir de malhas com espaçamento de 10' x 10', modelo 3 (EGM360b) (intervalo de contorno: 0,5 m).....	101
Figura 44	Diferenças nas anomalias ar-livre entre o modelo 4 (GPM540) e o modelo 5 (GPM540b) (intervalo de contorno: 5 mgal).....	102
Figura 45	Diferenças nas alturas geoidais residuais, entre o modelo 4 (GPM540) e o modelo 5 (GPM540b) (intervalo de contorno: 0,1 m). ..	103
Figura 46	Diferenças nas alturas geoidais finais, entre o modelo 4 (GPM540) e o modelo 5 (GPM540b) (intervalo de contorno: 0,2 m).....	104
Figura 47	Alturas geoidais do modelo 5 (GPM540b), obtido usando anomalias de ar-livre a partir das correspondentes Bouguer (intervalo de contorno 0,5m).....	104
Figura 48	Diferenças entre o efeito de terreno simples e considerando o efeito indireto na gravidade (intervalo de contorno: 1 mGal).....	105
Figura 49	Altura geoidal do modelo 6 (GPM540c) (intervalo de contorno: 0,5 m)...	106

Figura 50	Alturas geoidais do Modelo 7 (Final) (intervalo de contorno 0,5 m).....	107
Figura 51	Avaliação absoluta dos modelos obtidos, no Uruguai.....	113
Figura 52	Avaliação absoluta dos modelos obtidos, na Argentina.....	115
Figura 53	Avaliação relativa do modelo 1 (EGM180).....	118
Figura 54	Avaliação relativa do modelo 2 (EGM360).....	119
Figura 55	Avaliação relativa do modelo 3 (EGM360b).....	120
Figura 56	Avaliação relativa do modelo 4 (GPM540).....	121
Figura 57	Avaliação relativa do modelo 5 (GPM540b).....	122
Figura 58	Avaliação relativa do modelo 6 (GPM540c).....	123
Figura 59	Avaliação relativa do modelo 7 (Final).....	124
Figura 60	Modelo 2 (EGM96) para distâncias médias e longas.....	126
Figura 61	Modelo geoidal UruGeóide 2000.....	129

LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 1	Dados de controle absolutos GPS/RNs, no Uruguai..... 46
Tabela 1a.	Dados de controle relativos GPS/RNs, no Uruguai..... 47
Tabela 2	Dados de controle GPS/RNs, na Argentina..... 47
Tabela 3	Resumo das principais características de cada modelo geoidal calculado. 54
Tabela 4	Seleção inicial de dados gravimétricos..... 56
Tabela 5	Comparação e seleção dos dados gravimétricos em cada uma das 14 quadrículas analisadas (*, indica estações em que os valores foram reduzidos ao valor atual de Postdam)..... 58
Tabela 6	Valores estatísticos da Base de Dados Gravimétricos..... 61
Tabela 7	Valores estatísticos do arquivo de anomalias ar-livre..... 63
Tabela 8	Valores estatísticos dos arquivos de dados topográficos combinados..... 66
Tabela 9	Estatísticas das malhas topográficas geradas..... 82
Tabela 10	Estatísticas do cálculo das anomalias residuais, modelo 1 (EGM180) (valores em mGal, quando não especificado)..... 86
Tabela 10a.	Estatísticas do cálculo das anomalias residuais, modelo 2 (EGM360) (valores em mGal quando não especificado)..... 86
Tabela 11	Estatísticas das alturas geoidais finais (em m) do modelo 1 (EGM180).... 92
Tabela 11a.	Estatísticas das alturas geoidais finais (em m) do modelo 2 (EGM360).... 92
Tabela 12	Estatísticas das anomalias residuais (em mGal) do modelo 4 (GPM540).. 94
Tabela 13	Estatísticas das alturas geoidais finais (em m), do modelo 4 (GPM540)... 97
Tabela 14	Diferenças entre diversos parâmetros dos modelos geoidais calculados.... 97
Tabela 15	Diferenças entre o modelo 4 (GPM540) e o modelo 5 (GPM540b)..... 102
Tabela 16	Estatísticas e diferenças dos efeitos direto e indireto na gravidade, malhas com espaçamento regular de 5' x 5' (valores em mGal)..... 105
Tabela 17	Diferenças entre a altura geoidal obtida com GPS e a dos modelos geoidais, 1, 2, 3 e 7 (baseados no EGM96), para os dados do Uruguai (alturas do geóide em m)..... 112
Tabela 17a.	Diferenças entre a altura geoidal obtida com GPS e a dos modelos geoidais, 4, 5 e 6 (baseados no GPM98CR), para os dados do Uruguai (alturas do geóide em m)..... 113
Tabela 18	Diferenças entre a altura geoidal obtida com GPS e a dos modelos

	geoidais, 1, 2, 3 e 7 (baseados no EGM96), para os dados da Argentina (alturas geoidais em m)	114
Tabela 18a.	Diferenças entre a altura geoidal obtida com GPS e a dos modelos geoidais 4, 5 e 6 (baseados no GPM98CR), para os dados da Argentina (alturas geoidais em m).....	115
Tabela 19	Avaliação relativa do modelo 1 (EGM180) (alturas geoidais e desníveis em m)	118
Tabela 20	Avaliação relativa do modelo 2 (EGM360) (alturas geoidais e desníveis em m)	119
Tabela 21	Avaliação relativa do modelo 3 (EGM360b) (alturas geoidais e altitudes em m).	120
Tabela 22	Avaliação relativa do modelo 4 (GPM540) (alturas geoidais e desníveis em m)	121
Tabela 23	Avaliação relativa do modelo 5 (GPM540b), obtido a partir de anomalias gravimétricas Bouguer (alturas geoidais e desníveis em m).....	122
Tabela 24	Avaliação relativa do modelo 6 (GPM540c), obtido a partir de anomalias gravimétricas Bouguer, considerando o efeito indireto de terreno na gravidade (alturas geoidais e desníveis em m).....	123
Tabela 25	Avaliação relativa do modelo 7 (Final), obtido a partir do modelo geopotencial EGM96 (120), anomalias gravimétricas Bouguer, com espaçamento de 10'x 10' e considerando o efeito indireto de terreno na gravidade (alturas geoidais e desníveis em m).....	124
Tabela 26	Resultados do modelo 2 (EGM360), para distâncias médias e longas.....	125
Tabela 27	Resultados do modelo 2 (EGM360), para distâncias inferiores a 15 km....	125
Tabela 28	Resumo da avaliação realizada nos modelos geoidais (diferenças médias, máximos, mínimos e variação em m).....	127
Tabela 29	Funções polinomiais de segunda ordem, representativas da avaliação relativa de cada modelo geoidal.....	127

LISTA DE SIGLAS

IAG	Associação Internacional de Geodésia
IAG-USP	Instituto Astronômico e Geodésico, Universidade de São Paulo.
BDG	Base de Dados Gravimétricos
BDGU	Base de Dados Gravimétricos do Uruguai
BGI	Bureau Gravimetrique Internationale
CPGCG	Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas
EGM96	Earth Gravitational Model 1996, adotado em 01/10/1996
GEMT-2	Gravitational Earth Model, versão 2
GEOSAT	GeoSatellite
GMGA9706	Global Marine Gravity Anomalies, versão Junho de 1997
GPM98CR	Geopotential Model 1998 versão CR
GPS	Global Positioning System
GTOPO30	Global Topographic Model, resolução 30"
IfE	Institut für Erdmessung, Hanôver, Alemanha
IGeS	International Geoid Service
NIMA	National Imagery and Mapping Agency
MTD	Modelo Topográfico Digital
MMQ	Método de Mínimos Quadrados
ppm	parte por milhão
RN, RNs	Referência de Nível, Referências de Nível
ROUUSAMS	Sistema oficial de coordenadas geodésicas locais do Uruguai, definido em 1965, com ponto origem no vértice geodésico I-Yacaré.
SCGGSA	Subcomissão para a Gravidade e o Geóide para América do Sul
SEASAT	Sea Satellite, satélite para medição de altimetria dos mares
SGM	Serviço Geográfico Militar, Uruguai, instituição responsável desde 1913 pela cartografia e a geodésia no país
SIRGAS	Sistema de Referência Geocêntrico para América do Sul
DFT	Transformada discreta de Fourier
1DFFT	Transformada rápida de Fourier unidimensional
2DFFT	Transformada rápida de Fourier bidimensional

FT	Transformada de Fourier
FFT	Transformada Rápida de Fourier
UFPr	Universidade Federal do Paraná
USGS	United States Geological Service
USP	Universidade de São Paulo
WGS84 (G873)	World Geodetic System 1984, adotado na semana GPS No. 873 (29/09/1996)

LISTA DE SÍMBOLOS

1) Símbolos representados com letras latinas

$a_{n,m}, b_{n,m}$, ou

$C_{n,m}, S_{n,m}$ constantes associadas ao grau n e a ordem m , do desenvolvimento do potencial gravitacional de harmônicos esféricos;

a, b semi-eixos maior e menor, respectivamente do elipsóide de referência;

a_n, b_m os coeficientes da série de Fourier;

A_P potencial de atração da topografia entre o geóide e um ponto P , na superfície terrestre;

$A_{P_0}^c$ potencial de atração das massas condensadas sobre o geóide, no P_0 ;

\bar{C} coeficientes harmônicos esféricos plenamente normalizados;

e primeira excentricidade no elipsóide;

F transformada de Fourier;

F^{-1} transformada inversa de Fourier;

g módulo do vetor aceleração da gravidade;

$g(t)$ função periódica;

\vec{g} vetor aceleração da gravidade;

G constante universal de gravitação;

G_n componentes espectrais de grau n , da função periódica;

$G(f)$ o espectro da função $g(t)$;

GM constante gravitacional geocêntrica;

h altitude geométrica ou elipsoidal, medida ao longo da normal elipsoidal;

H altitude ortométrica;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ versores dos eixos cartesianos X, Y, Z ;

J_{2n} coeficiente zonal de grau $2n$, do esferopotencial;

l, l' distância entre dois corpos;

l_N, L_N núcleo da fórmula de Stokes e espectro do núcleo, respectivamente;

M massa da Terra;

M_A massa da atmosfera;

\vec{n} normal à superfície do elipsóide;

n, m grau e ordem do desenvolvimento em harmônicos esféricos;

N	altura geoidal (distância entre o geóide e o elipsóide ao longo da normal);
N^C	altura do co-geóide, distância entre o elipsóide e o geóide compensado;
N_H	contribuição do relevo na altura geoidal;
N_{MG}	contribuição do modelo geopotencial na altura geoidal;
$N_{\Delta g^{res}}$	contribuição das anomalias da gravidade residuais na altura geoidal;
$\bar{P}_{n,m}$	função de Legendre plenamente normalizada, de grau n e ordem m ;
r	distância geocêntrica de um ponto;
R	raio médio terrestre (raio de uma esfera do mesmo volume que o elipsóide terrestre, aproximadamente 6371 km);
$S(\cdot)$	função de Stokes ou núcleo da fórmula de Stokes;
T	potencial perturbador ou período de uma função;
U	esferopotencial;
V	potencial gravitacional da Terra real;
W	geopotencial;
x, y, z	coordenadas cartesianas geocêntricas;
X_n, iY_n	parte real e imaginária respectivamente de uma componente espectral de grau n ;
\bar{Y}	harmônico esférico de superfície plenamente normalizado, de grau n e ordem m ;
Z	potencial gravitacional da Terra Normal.

2) Símbolos representados com letras gregas

δA	efeito no potencial causado pela condensação da topografia;
δN	efeito indireto para a altura geoidal, causado pela condensação da topografia;
δT	efeito indireto para o potencial anômalo causado pela condensação da topografia;
$\delta \Delta g$	efeito indireto para a anomalia gravimétrica, causado pela condensação das massas topográficas;
γ	gravidade normal;
γ_E, γ_P	gravidade normal no equador e no pólo, respectivamente;
$\vec{\gamma}$	vetor da aceleração da gravidade normal;
φ	latitude geodésica;

κ	camada de massas condensada no segundo método de condensação de Helmert;
λ	longitude geodésica;
π	relação entre o diâmetro e o perímetro da circunferência;
θ	co-latidade geocêntrica;
θ_N	fase espectral de uma função;
ρ	densidade da massa considerada;
σ	esfera de raio unitário;
ω	velocidade angular da rotação terrestre;
ψ	distância esférica entre dois pontos;
ζ	altitude normal;
Δg	anomalia de gravidade;
$\Delta \mathbf{g}$	vetor anomalia de gravidade;
Δg_{AL}	anomalia de gravidade ar-livre;
Δg_H	contribuição do relevo na anomalia da gravidade;
Δg_{MG}	contribuição do modelo geopotencial na anomalia da gravidade;
Δg^{res}	anomalia da gravidade residual;
$\Delta f, \Delta u, \Delta v,$	resolução da amostragem no espectro de uma função;
$\Delta t, \Delta x, \Delta y,$	resolução espacial ou temporal da amostragem de uma função;
Φ	latitude astronômica, também o potencial centrífugo da Terra real e da Terra Normal
Λ	longitude astronômica

3) Símbolos matemáticos

$ \bullet $	módulo;
$\mathbf{\bullet}$	vetor;
∇	operador de Hamilton, em coordenadas cartesianas, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$;
Δ	operador de Laplace, em coordenadas cartesianas, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{k}$;

$\mathbf{L}f$ operador funcional, da forma: $\mathbf{L}f = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{f - f_P}{l^3} dx dy$; $\mathbf{L}^n = \frac{\partial^n}{\partial z^n}$;

Σ somatório;

- operador convolução, em análise espectral corresponde a uma multiplicação no domínio das frequências.

$g(t) = \int_{u=a}^{u=b} A(t,n) f(u) du$ operador de Stokes ou operador integral linear (Moritz, 1980), que

transforma a função $f(u)$ na função $g(t)$; $A(t,u)$, é o núcleo o kernel da função.

Corresponde ao operador convolução no domínio das frequências.

CONVENÇÕES USADAS

- 1) As palavras em idioma estrangeiro (exceto nomes próprios), serão escritos entre aspas;
- 2) Os nomes dos programas de computação, serão escritos em *letra itálica*, sem extensão, exemplo: *fftgeoid*;
- 3) Os arquivos gerados terão o seu nome escrito **em negrito**, com extensão, exemplo: **mdt2.dat**;
- 4) A palavra de origem inglesa, “grid”, será usada com as traduções de: reticulado ou malha.

RESUMO

Neste trabalho são apresentados os dados, a metodologia e os resultados do cálculo de um modelo geoidal de alta precisão e resolução para o Uruguai, denominado de Projeto UruGeoide 2000. Pode-se descrever o trabalho apresentado no texto, nas seguintes linhas gerais:

O *objetivo* do projeto, é calcular um modelo geoidal de alta precisão e resolução para a área, situada entre os paralelos -30° e -35° e os meridianos $301,5^{\circ}$ e 307° ($-58,5^{\circ}$ e -53°).

A *finalidade* do modelo é fornecer uma transformação acurada, entre as altitudes ortométrica e elipsoidal e também servir de base para estudos na área das geociências no Uruguai.

O *método* consiste no cálculo do geóide gravimétrico, através da fórmula de Stokes na forma esférica e com núcleo rigoroso, avaliada no domínio das frequências via transformada rápida de Fourier unidimensional (1DFFT).

A *técnica principal de cálculo* é a decomposição da altura geoidal (Sideris, 1991), usando uma adequada combinação de modelos geopotenciais de alto grau, anomalias gravimétricas e dados topográficos contidos em um modelo topográfico digital (MTD). A premissa da não existência de massas externas à superfície limitante (o geóide) foi contemplada com o uso do segundo método de condensação topográfica de Helmert, levando em consideração o correspondente efeito indireto.

Foram gerados 7 modelos geoidais, usando diversas opções que a metodologia e os programas ofereceram. Os modelos passaram por uma avaliação, baseada em dados GPS/RNs, na forma absoluta e relativa, na qual foi escolhido àquele que forneceu o melhor desempenho geral. O modelo geoidal escolhido, denominado de *UruGeoide 2000*, *têm uma precisão absoluta de 0, 25 m, e relativa 2 ppm por km*, atingindo as metas planejadas previamente no projeto.

ABSTRACT

It is presented the results and methodology, used to calculate a high precision and resolution geoidal model for Uruguay, named UruGeoide 2000 Project.

The project can be describe on the following general lines:

The *objective* was to calculate a high precision and resolution geoidal model for the area located between latitudes -30° to -35° and longitudes 301.5° to 307° (-58.5° to -53°).

The *planned use* of the geoidal model, will be to provide an accurate transformation, between ellipsoidal and orthometric heights and as a base for geo-sciences in Uruguay.

The *calculation method*, was the gravimetric one, through the Stokes formula in spherical form and with rigorous function kernel, via the one dimensional Fast Fourier Transform (1DFFT).

The *main calculation technique* was a remove-restore procedure (Sideris, 1991), using an adequate combination of a high degree geopotencial model, gravimetric anomalies and topographic data from a DTM. The imposed condition of no having masses outside to the boundary surface, was satisfied using the Helmert' second condensation method for the topography, taking in account the correspondent indirect effect.

Because of the various options and methodologies, offered by the available programs, a total of 7 geoidal models were generated. The different models, were evaluated with two set of GPS observations over benchmarks, in absolute and relative form, being choosing that one who show the best overall performance. *The geoidal model chosen, named UruGeoide 2000, has an absolute precision of 0,25 m and a relative one of 2 ppm, satisfying the planned aimed of the project.*

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Recentemente, o posicionamento por satélite como o GPS (Global Positioning System), assim como a integração dos sistemas geodésicos locais aos sistemas regionais ou globais, tornou o conhecimento preciso do geóide, uma necessidade básica na Geodésia atual. As coordenadas cartesianas tridimensionais (x, y, z) , obtidas através de satélites são facilmente transformáveis em coordenadas geodésicas, latitude, longitude e altitude elipsoidal (φ, λ, h) ; porém, a altitude h , carece de significado físico, sendo simplesmente uma quantidade matemática referida a um elipsóide escolhido. A redução da altitude elipsoidal à altitude ortométrica, referida a um geóide particular, requer o conhecimento acurado da separação entre as duas superfícies, o elipsóide e o geóide, a qual é denominada *ondulação do geóide* ou, num determinado ponto, *altura geoidal* N . Em termos globais, os modernos modelos geopotenciais fornecem alturas geoidais com precisão de $\pm 1\text{m}$ (Lemoine *et al.*, 1997); mas, quando a necessidade de acurácia é maior, devem-se usar dados gravimétricos e topográficos, com o objetivo de obter a precisão necessária.

No Uruguai, o SGM (instituição oficialmente responsável pela cartografia do país), começou o emprego sistemático das técnicas de observação GPS em 1993. Desde esta época, é reconhecida a necessidade de compatibilizar as altitudes obtidas por GPS, com as definidas pelo datum vertical uruguaio, definido em 1948,0; além de se procurar melhorar o aproveitamento da capacidade de medição altimétrica do GPS. Estas duas razões destacam a importância do presente trabalho, desde que um modelo geoidal de boa precisão e resolução atenda estes aspectos. As atividades referentes ao cálculo de um modelo geoidal adequado para o Uruguai começaram no ano 1994, quando foi calculado o modelo GeoidUru 1994 (Blitzkow *et al.*, 1994), num acordo entre o SGM e a USP. O modelo geoidal calculado foi baseado no modelo do geopotencial GEMT2, completo até o grau 36 e mais de 900 estações gravimétricas no Uruguai. O método para a sua determinação, foi a separação espectral da altura geoidal em duas componentes: uma de longo comprimento fornecido pelo modelo mencionado e a outra de médio comprimento, obtida através do cálculo numérico da integral de Stokes modificada, com um raio de integração de 5° . Os efeitos direto e indireto do relevo topográfico, não foram considerados nessa oportunidade devido à falta de um modelo topográfico digital (MTD). Foram realizados testes no modelo usando estações GPS sobre referências de nível e outros modelos geopotenciais, tais como o OSU91A e o EGM96 (Subiza, 1998a), sendo detectados erros sistemáticos nas alturas geoidais fornecidas pelo modelo, principalmente na zona leste do Uruguai. Além disso, a disponibilidade de novos

dados gravimétricos e topográficos, levou ao estabelecimento de um projeto para a determinação de um modelo geoidal de maior precisão e acurácia, o qual é o objetivo principal deste trabalho e que se pode descrever nas seguintes linhas gerais:

O *objetivo* do trabalho, é o cálculo de um modelo geoidal de alta precisão e resolução para Uruguai, situado entre os paralelos -30° a -35° , e os meridianos $301,5^{\circ}$ e 307° ($-58,5^{\circ}$ e -53°); com a *finalidade* de fornecer uma transformação adequada, entre altitudes ortométricas e elipsoidais e além disso, servir como base de estudos na área das geociências no Uruguai.

O *método* consiste no cálculo do geóide gravimétrico, através da fórmula de Stokes na forma esférica e com núcleo rigoroso, avaliada no domínio das frequências via Transformada Rápida de Fourier unidimensional (1DFFT).

A *principal técnica de cálculo* usada, é a *decomposição da altura geoidal* em diferentes comprimentos de onda, denominada na literatura inglesa de "remove-restore" (Sideris, 1997), usando uma combinação adequada de um modelo geopotencial de alto grau, anomalias gravimétricas e dados topográficos na forma digital. A premissa da não existência de massas externas à superfície limitante (o geóide) foi contemplada através da correção atmosférica dos valores observados de gravidade e do segundo método de condensação da topografia de Helmert, levando em consideração o correspondente efeito indireto (Heiskanen e Moritz, 1985). Como base dos modelos geoidais, foram empregados dois modelos geopotenciais de alto grau e ordem, o EGM96 (Lemoine *et al.*, 1998) e o GPM98CR (Wenzel, 1998).

Assim, no Capítulo 2 são expostos os fundamentos conceituais nos quais se baseia este trabalho e as principais fórmulas dos programas empregados. No Capítulo 3, faz-se uma descrição dos dados disponíveis, incluindo quantidade, tipo e distribuição geográfica dos mesmos, assim como um resumo dos principais valores e constantes adotadas. No Capítulo 4, é detalhada a metodologia empregada na formação dos arquivos de trabalho, as estatísticas dos mesmos, assim como se apresentam Figuras que esclarecem os passos seguidos nos cálculos e determinações dos modelos geoidais obtidos. O Capítulo 5 apresenta os resultados dos modelos geoidais, na forma de Figuras e Tabelas, enquanto no Capítulo 6, é mostrada a avaliação feita nos modelos geoidais calculados, usando os dados de controle disponíveis. Finalmente, o Capítulo 7 estabelece as conclusões do trabalho e sugere futuros trabalhos e linhas de pesquisa a serem realizados, naqueles pontos em que foi detectada a necessidade de otimizar e ou continuar este trabalho.

CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS CONCEITUAIS

2.1 INTRODUÇÃO

Chama-se *problema de valor de contorno*, à determinação dos valores de uma variável sobre uma superfície limite, através de observações diretas ou indiretas. Na Geodésia, a determinação das ondulações do geóide, vincula-se ao *problema de valor de contorno da Geodésia* (PVCG), sendo de tipo semelhante ao terceiro problema de contorno da Teoria do Potencial. No PVCG, são dadas uma combinação linear do potencial perturbador e sua derivada normal sobre uma superfície e determina-se, a função que toma estes valores na sua superfície e é harmônica no exterior das massas terrestres.

Dependendo do tipo de superfície adotada, temos as soluções de Stokes¹ (superfície geoidal) ou a de Modolenski (superfície física da Terra), tendo ambas vantagens e desvantagens. A solução de Stokes, estabelecida em 1849 através da fórmula que leva seu nome, apresenta várias vantagens: é de formulação matemática simples, a integração efetua-se na própria superfície equipotencial, o geóide e as altitudes usadas no Uruguai (área do trabalho), estão referidas a essa mesma superfície. A solução de Modolenski (apresentada em 1945), porém mais rigorosa devido a não requerer de reduções da gravidade, é mais complexa na sua formulação e as altitudes referem-se à superfície denominada teluróide, origem da denominada altitude normal, H^* .

A solução de Stokes, usa anomalias de gravidade (as quais na realidade, são uma combinação linear do potencial perturbador e sua derivada normal, como será visto neste Capítulo), para obter as alturas do geóide (distância ao longo da normal, entre a superfície elipsoidal e a superfície geoidal) e é a estratégia de cálculo usada neste trabalho. Esta aproximação, requer o conhecimento das anomalias gravimétricas em toda a superfície a determinar, e a eliminação das massas terrestres externas a ela, o que restringiu a sua aplicação prática, até o século XX.

Modernamente, a modificação da integral de Stokes e o uso de modelos geopotenciais de alto grau e ordem, permitiram contornar as limitações expressadas e explorar adequadamente

¹ Sir Georg Gabriel Stokes (1819-1903). Físico e matemático irlandês, notabilizou-se por seus estudos sobre o comportamento dos fluidos viscosos e pelo teorema de Stokes no campo de análise vetorial. Sua contribuição à Geodésia deu-se através de um trabalho publicado em 1849, sobre o comportamento da gravidade sobre a superfície terrestre.

as anomalias de gravidade para obter os comprimentos de onda mais curtos das alturas geoidais.

Além disso, o desenvolvimento de técnicas de cálculo, usando a transformada rápida de Fourier (FFT), permitiram o processamento de grandes volumes de dados, o que possibilitou também a inclusão dos modelos topográficos digitais (MTD), no cálculo dos efeitos gravimétricos da topografia. A comparação das alturas do geóide obtidas a partir de um modelo calculado, com outro tipo de altura geoidal (por exemplo através do uso de observações a satélites), permite avaliar a precisão e acurácia dos modelos obtidos.

Neste capítulo, serão apresentados os potenciais da Terra real, da Terra Normal e o potencial anômalo ou perturbador (seções 2, 3 e 4). As anomalias de gravidade, são o objeto da seção 5. Na seção 6, desenvolve-se a solução do problema do valor de contorno para o geóide, completando assim, os conceitos básicos da fórmula de Bruns e da fórmula de Stokes, a fim de se obter as alturas do geóide. Na seção 7, apresentam-se as reduções gravimétricas, que permitem levar em consideração o problema real da existência de massas acima do geóide e a seção 8, mostra a formulação da técnica de decomposição da altura geoidal para contornar as limitações na aplicação prática da formulação de Stokes. A aplicação da FFT é objeto da seção 9, mostrando diversas aproximações e fórmulas dos programas usados na fórmula de Stokes, dos efeitos do relevo e do efeito indireto do método de condensação de Helmert. Finalmente, a seção 10 apresenta os métodos de avaliação dos modelos geoidais, calculados com a metodologia descrita.

2.2 POTENCIAL DA GRAVIDADE REAL

No sistema de coordenadas cartesianas geocêntricas X, Y, Z , o potencial de gravidade terrestre W , no ponto $P_{(x, y, z)}$, pode ser representado pela expressão (Moritz, 1980):

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \Phi(x, y, z), \quad (1)$$

sendo V , o potencial gravitacional, expresso por

$$V(x, y, z) = G \int \frac{\rho_Q}{l} dV_Q. \quad (1a)$$

Nesta expressão, dV_Q é o elemento de volume, centrado em Q , com densidade de massa ρ_Q , l é a distância entre o ponto de cálculo e Q e finalmente G , é a constante universal da gravitação. A integral é estendida em toda a Terra, incluindo a parte sólida e líquida, sendo

que a atmosfera não é incluída, mas seu efeito é levado em consideração depois, mediante uma correção apropriada nas observações de gravidade. A Terra é considerada rígida no tempo, a menos de algumas variações como marés ou movimento do pólo. O erro introduzido com estas aproximações, é de 10^{-7} (Schwarz *et al.*, 1990). Em determinados casos e necessitando de maior precisão, devem ser consideradas outras variações com a introdução de correções adequadas.

Em (1), Φ é o potencial devido à força centrífuga, expresso por

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (1b)$$

sendo ω a velocidade angular da rotação terrestre.

As superfícies sobre as quais o potencial W_P é constante, são denominadas superfícies equipotenciais, sendo o vetor gravidade perpendicular a elas. De particular interesse entre essas superfícies, é o geóide (W_0) que, numa primeira aproximação, pode ser definido como a superfície média dos mares (em repouso ou equilíbrio), que imaginariamente se estende nos continentes². O geóide tem sido a superfície de referência usada como datum vertical, porém sua determinação não é simples e única.

O gradiente do geopotencial W , define o *vetor gravidade*, num sistema cartesiano

$$\nabla W = \mathbf{g} = \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2)$$

A intensidade do vetor gravidade, denominada simplesmente *gravidade*, é a quantidade física fornecida diretamente pelos gravímetros absolutos, ou indiretamente pelos gravímetros relativos,

$$g = |\mathbf{g}|. \quad (3)$$

A direção do vetor gravidade é expressa pelo versor \mathbf{h} :

$$\mathbf{h} = -g^{-1} \mathbf{g}, \quad (4)$$

adotando o sinal negativo para que \mathbf{h} tenha o sentido contrário ao de \mathbf{g} .

Se nos potenciais W e V , (expressões 1 e 1a), é aplicado o operador de Laplace no exterior da superfície limite da Terra, o resultado é

$$\Delta W = 2\omega^2, \quad (5)$$

² Gauss, referiu-se a esta superfície escrevendo: “O que chamo de superfície da Terra, no sentido geométrico, é nada mais que uma superfície que intersecta em todo ponto a direção da gravidade em ângulo reto e parte da qual coincide com a superfície dos oceanos”. Em 1873, Listing deu a esta superfície de nível o nome de *geóide*. (Torge, 1991)

$$\Delta V = 0, \quad (6)$$

mostrando que o potencial V , pode ser expresso através do desenvolvimento em termos de harmônicos esféricos³, no ponto de coordenadas (r, θ, λ) (Pavlis, 1997)

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{n_{\max}} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda) \right], \quad (7)$$

onde GM é a constante gravitacional geocêntrica, a é o semi-eixo maior do elipsóide de referência, \bar{C}_{nm} são os coeficientes plenamente normalizados, de grau n e ordem m , do potencial gravitacional desenvolvido em harmônicos esféricos⁴, \bar{Y}_{nm} são os harmônicos esféricos de superfície plenamente normalizados, expressos por

$$\bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{n|m|}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\lambda, & \text{para } m \geq 0 \\ \sin |m|\lambda, & \text{para } m < 0 \end{cases}, \quad (8)$$

sendo $\bar{P}_{n|m|}$ as funções associadas de Legendre plenamente normalizadas de grau n e ordem m .

2.3 POTENCIAL DA GRAVIDADE NORMAL

O modelo de referência adotado para o estudo do campo de gravidade terrestre, é o modelo matemático denominado de Terra Normal, definido através de um elipsóide centrado no geocentro, tendo o eixo menor coincidente com o eixo de rotação terrestre; à Terra Normal associam-se as seguintes propriedades físicas:

- tem a mesma massa da Terra real;
- tem a mesma velocidade angular de rotação; e
- o potencial U_0 , constante sobre sua superfície, é igual ao potencial W_0 , sobre a superfície geoidal.

Como no caso do geopotencial, o esferopotencial U , contém duas parcelas: a do potencial gravitacional do elipsóide Z e a do potencial centrífugo Φ , causado pela rotação do corpo.

³ Veja Anexo I – A equação de Laplace e os harmônicos esféricos.

⁴ O desenvolvimento começa no termo 2, devido a que o termo de grau zero resulta no potencial de uma esfera homogênea (representado pelo primeiro termo da expressão (7)) e os termos de grau 1 são nulos, dada a condição do potencial gravitacional de ser geocêntrico.

O potencial gravitacional do elipsóide Z , satisfaz a equação de Laplace $\Delta Z = 0$, o que permite representá-lo através do desenvolvimento em harmônicos esféricos, da forma (Gemael, 1999)

$$Z = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\theta) \right], \quad (9)$$

a qual contém apenas coeficientes zonais pares J_{2n} , devido à simetria do elipsóide e os harmônicos esféricos zonais P_{2n} . Os coeficientes zonais, são expressos por

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \left[1 - n + \frac{5n(C-A)}{Mc^2} \right] \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}, \quad (10)$$

sendo A e C os momentos de inércia da Terra em relação aos eixos X e Z , respectivamente, M a massa da Terra, c e e a semidistância focal e a primeira excentricidade do elipsóide respectivamente. Atualmente, a expressão (9), é calculada até $n_{\max} = 5$.

O gradiente do esferopotencial U , define o *vetor gravidade normal*:

$$\vec{\gamma} = \nabla U. \quad (11)$$

A intensidade desse vetor, é denominada *gravidade normal* γ , e é calculada através da fórmula de Somigliana, recomendada pela IAG para cálculos numéricos (Nima, 1998; Heiskanen e Moritz, 1985):

$$\gamma = \gamma_E \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (12)$$

sendo γ_E a gravidade normal no equador do elipsóide, $k = \frac{b \gamma_P}{a \gamma_E} - 1$, a e b , são os semi-eixos do elipsóide adotado e γ_P é a gravidade polar do elipsóide.

2.4 O POTENCIAL ANÔMALO OU PERTURBADOR

A diferença relativamente pequena, entre o esferopotencial e o geopotencial, é denominada de *potencial anômalo ou perturbador*. Para um elipsóide corretamente determinado, a diferença entre as duas superfícies equipotenciais (elipsóide e geóide), é no máximo da ordem de 100 m. O potencial anômalo no ponto P , é expresso por

$$T_P = W_P - U_P = V_P - Z_P, \quad (13)$$

considerando que os potenciais centrífugos tem o mesmo valor pelas propriedades da Terra Normal, mencionadas anteriormente.

Escrevendo

$$W_p = U_p + T_p, \quad (14)$$

fica claro que o campo de gravidade terrestre pode ser separado em duas componentes: uma principal que é o campo normal U e outra menor que é o campo anômalo T . Isto é muito prático já que a parte principal é calculada com fórmulas rigorosas e a restante, mesmo sendo irregular, por ser pequena, permite usar no cálculo, aproximações lineares (por exemplo Taylor).

O potencial anômalo $T(r, \phi, \lambda)$, é uma função espacial harmônica⁵ fora das massas terrestres, ou seja satisfaz a equação de Laplace e pode-se representar em série de harmônicos esféricos:

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda), \quad (15)$$

com definições e considerações semelhantes as dadas nas expressões (7) e (8).

Os coeficientes do potencial anômalo $\bar{C}_{n,m}$, são calculados subtraindo-se os coeficientes do potencial gravitacional normal \bar{C}^Z , dos coeficientes do mesmo grau do potencial gravitacional \bar{C}^V , por exemplo (Subiza, 1999a)

$$\begin{aligned} \bar{C}_{n0}^T &= \bar{C}_{n0}^V - \bar{C}_{n0}^Z, \text{ para } m=0, \text{ e } n \leq \text{grau máximo em } Z; \\ \bar{C}_{n0}^T &= \bar{C}_{n0}^V, \text{ para } m=0 \text{ e } n > \text{grau máximo em } Z; \\ \bar{C}_{nm}^T &= \bar{C}_{nm}^V \text{ para } m \neq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

2.5 ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS

Escolhendo o geopotencial do geóide W_0 , e um elipsóide de referência do mesmo potencial ($W_0=U_0$), projeta-se o ponto P_0 sobre o geóide, no ponto Q sobre o elipsóide, através da normal (Figura 1). A distância geóide-elipsóide $P_0 Q$, denomina-se altura geoidal, N (Heiskanen e Moritz, 1985).

Considerando os vetores \vec{g} em P_0 , e \vec{f} em Q , define-se o *vetor anomalia de gravidade* (Heiskanen e Moritz, 1985), como a diferença

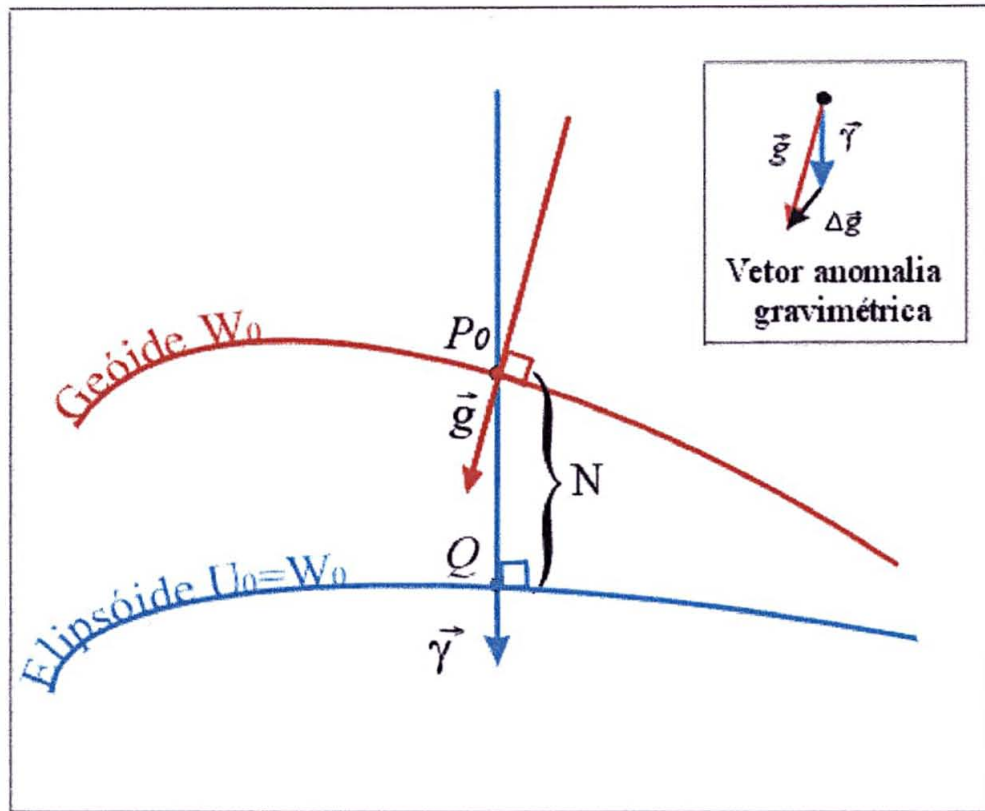


Figura 1. A gravidade no geóide e no elipsóide incluindo o vetor de anomalia gravimétrica.

As quantidades definidas podem se relacionar de várias formas, assim

$$U_{P_0} = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_Q N = U_Q - \gamma N; \quad (19)$$

temos que

$$W_{P_0} = U_{P_0} + T_{P_0} = U_Q - \gamma N + T, \quad (20)$$

como $W_{P_0} = U_Q = W_0$, tem-se

$$T = \gamma N, \quad (21)$$

e

$$N = \frac{T}{\gamma}, \quad (22)$$

como $W_{Po}=U_Q=W_0$, tem-se

$$T = \gamma N, \quad (21)$$

e

$$N = \frac{T}{\gamma}, \quad (22)$$

que é denominada *fórmula de Bruns* e relaciona o potencial perturbador com a altura geoidal, através da gravidade normal.

A altitude elipsoidal h é contada ao longo da normal; assim, a relação $-\partial T/\partial n = -\partial T/\partial h$ é válida.

Sendo

$$\gamma_P = \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (23)$$

resulta

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \delta g = g_P - \gamma_P = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N. \quad (24)$$

Onde δg é o denominado *distúrbio de gravidade*, que compara a gravidade teórica e a gravidade real no mesmo ponto da superfície terrestre.

Lembrando a definição da anomalia de gravidade, expressão (18), e levando em consideração a fórmula de Bruns, obtém-se as seguintes fórmulas equivalentes

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (25)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T, \quad (25a)$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g = 0 \quad (25b)$$

denominada *equação fundamental da Geodésica Física*.

Usando a aproximação esférica, as anomalias de gravidade podem ser expressas a partir da (25b)

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T, \quad (26)$$

mostrando também, que as anomalias de gravidade são uma combinação linear do potencial perturbador e a sua derivada normal.

Partindo da expressão (15) do potencial anômalo, com a aproximação esférica e considerando o raio terrestre médio $R=a=r$, podemos calcular as duas parcelas de (26),

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda), \text{ e} \quad (27)$$

$$\frac{2}{r}T = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} 2 \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda). \quad (28)$$

Assim as anomalias de gravidade, expressas em função do potencial anômalo tomam a forma

$$\Delta g = \bar{g} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n-1) \bar{C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda), \quad (29)$$

onde $\bar{g} = GM/r^2$, é a gravidade média da Terra.

A equação (25b), tem a forma de uma equação diferencial parcial. Se Δg fosse conhecido em todo o espaço, ela poderia ser resolvida de forma rigorosa. Na realidade, as anomalias de gravidade, são conhecidas somente em parte da superfície terrestre, razão pela qual a equação fundamental pode ser usada apenas como uma condição de contorno.

O efeito causado pela presença de massas externas ao geóide, é solucionado através da correção atmosférica e da redução das observações gravimétricas, da superfície física da Terra ao geóide, com as quais pode-se dizer que todas as massas ficam incluídas no interior do geóide (o efeito indireto no potencial deve ser convenientemente considerado). Desta forma, o potencial anômalo é harmônico fora das massas atrativas, onde a densidade das massas é zero, satisfazendo a equação de Laplace.

Nos desenvolvimentos em série de harmônicos esféricos do potencial perturbador T , da altura geoidal N e das anomalias de gravidade Δg (expressões 15, 22 e 29), devemos observar que:

- a) os coeficientes de Δg (expressão 29), são multiplicados por $(n-1)$, ou seja, coeficientes de maior grau são multiplicados por números maiores. Isto faz com que a convergência da série seja lenta.
- b) no caso de T (expressão 15) e consequentemente de N (expressão 22), a convergência é mais rápida, assim as séries de funções harmônicas de coeficientes truncados a um determinado grau, podem ser adequadas para calcular estas quantidades, mas não para Δg .

2.6 A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO VALOR DE CONTORNO PARA O GEÓIDE E A FÓRMULA DE STOKES

Partindo das expressões (15) e (29), pode-se expressar o potencial anômalo em função das anomalias de gravidade

$$T = R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta g_n}{n-1}, \quad (30)$$

onde Δg_n , são os harmônicos esféricos de superfície para Δg .

Laplace e posteriormente Dirichlet, demostraram que uma função de posição sobre uma esfera, pode ser desenvolvida através de uma série de harmônicos esféricos. Sendo essa função, as anomalias de gravidade sobre uma esfera S , de raio R , a função de posição é expressa por (Gemael, 1999)

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_S \Delta g_s P_n(\psi) dS \quad (31)$$

onde Δg_s , é a anomalia de gravidade localizada no ponto dS , e ψ é a distância angular sobre a superfície S , entre os ponto Δg_n e Δg_s .

Substituindo a expressão (31) em (30), tem-se

$$T = \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \int_S \Delta g_s P_n(\psi) dS, \quad (32)$$

trocando de lugar, o somatório e a integral (o qual é possível neste caso, por tratar-se de somas infinitas) resulta:

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_S \Delta g_s \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\psi) \right] dS. \quad (33)$$

O termo entre colchetes é denominado *função de Stokes*⁶, ou *núcleo (kernel) da integral* e é uma expressão analítica que pode ser calculada para qualquer ψ de forma rigorosa pela expressão

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right), \quad (34)$$

Com esta simplificação a denominada *integral de Stokes*, é expressa por

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_S \Delta g S(\psi) dS. \quad (35)$$

Condicionala por (25b), a (35) permite calcular T em todo ponto do geóide, desde que as anomalias de gravidade sejam conhecidas e mostra-se com clareza o problema de terceiro tipo da Teoria do Potencial, sendo as próprias anomalias de gravidade uma combinação linear de T e $\partial T / \partial h$ sobre a superfície equipotencial, o geóide. A partir do potencial perturbador, as alturas geoidais podem ser obtidas em cada ponto do geóide, com a *fórmula de Stokes*

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_S \Delta g S(\psi) dS, \quad (36)$$

Esta é a fórmula publicada em 1849 por Stokes, que permite determinar o geóide a partir de dados gravimétricos. Note-se que a integração estende-se sobre toda a superfície S .

Convém enfatizar que a expressão (36), foi derivada de (30) para $n \geq 2$, ou seja os termos de grau 0 e 1 são considerados nulos. O termo de grau 0, neste caso, representa a diferença entre as massas do elipsóide e da Terra, um valor ainda não conhecido com precisão. O termo de grau 1, representa a diferença entre as origens do centro de massas da Terra e do elipsóide escolhido; ao contrário do anterior, é possível se fixar arbitrariamente o valor zero.

A generalização da integral de Stokes, para o caso de se considerar o termo 0, é dada por (Heiskanen e Moritz, 1985)

$$N = \frac{G\delta M}{Rg} - \frac{\delta W}{g} + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_S \Delta g S(\psi) dS \quad (37)$$

⁶ A função de Stokes, pode ser considerada como uma função peso. Os zeros da função estão aproximadamente em $\psi=38^\circ$ e $\psi=118^\circ$. No ponto atraído, torna-se infinita e na sua proximidade, o cálculo deve ser modificado.

onde δM , é a diferença entre as massas e δW , a diferença entre os potenciais da Terra e do elipsóide. Esta equação, é válida somente no caso de um elipsóide geocêntrico. O termo,

$$N_0 = \frac{G\delta M}{Rg} - \frac{\delta W}{g} \quad (38)$$

é denominado ondulação geoidal zero e permite expressar a altura geoidal como a soma da altura geoidal fornecida pela fórmula de Stokes, mais um termo de erro na determinação da massa do elipsóide, em relação à massa da Terra real.

A interpretação de N_0 , é de que o nosso conhecimento da massa e potencial terrestres é ainda limitado e o uso da fórmula de Stokes fornece, não a verdadeira superfície do geóide, mas uma superfície semelhante e paralela, sendo N_0 a distância entre as duas. A determinação de N_0 pode ser feita através de uma simples medida de distância (na prática usam-se uma maior quantidade, distribuídas globalmente), e assim o geóide obtido, pode ser colocado em escala adequada.

No caso do modelo geopotencial EGM96, para referir as alturas geoidais ao elipsóide WGS84 (G830), deve ser adicionado o termo $N_0 = -0,53 \text{ m} \pm 0,10 \text{ m}$ (Lemoine *et al.*, 1998). Para o modelo GPM98CR, este termo não foi determinado.

O programa de cálculo das alturas do geóide, a partir do modelo geopotencial (*gravt_gm*), não implementa esta correção razão pela qual, as alturas geoidais, terão este erro sistemático incluído (entre outros).

2.7 CORREÇÕES GRAVIMÉTRICAS

As correções gravimétricas, consistem em aplicar métodos para resolver o problema da existência de massas acima do geóide. Para a correta aplicação da fórmula de Stokes, todas as massas da Terra devem estar contidas na superfície limitante, o geóide, o que originou diversos métodos matemáticos de contornar o problema (Gemael, 1999). Todas as reduções geram o denominado efeito indireto no potencial, devido ao deslocamento implícito das massas mas, corretamente aplicado, qualquer um dos métodos fornece o mesmo resultado. Na escolha do método de redução é importante levar em consideração que ele deve fornecer anomalias pequenas, referidas a algum modelo com significado físico e fornecer um efeito indireto pequeno (Heiskanen e Moritz, 1985). As massas, são separadas praticamente em duas contribuições diferentes: a atmosfera por um lado e as massas terrestres e oceânicas por outro.

2.7.1 A correção atmosférica à gravidade observada

O cálculo da gravidade teórica inclui na sua formulação a *totalidade* das massas atmosféricas. É possível demonstrar que a influência das massas da atmosfera situadas *acima* de uma estação gravimétrica na superfície terrestre, é nula o que não acontece com as massas localizadas por *baixo* desta (Groten, 1984). Esta é a origem da correção atmosférica aos valores da gravidade observada que o IAG adotou primeiro no sistema geodésico GRS67 e posteriormente para o GRS80. O modelo teórico foi, desenvolvido em 1969 por Ecker e Mittermayer (Sjöberg, 1999). O método é descrito em (Moritz, 1980), assumindo que a Terra seja aproximadamente esférica, de raio R e com uma atmosfera composta de camadas esféricas concêntricas. Desta forma é desprezada a diferença com um modelo elipsoidal da Terra e a topografia acima do raio médio R .

A correção com estas considerações, é fornecida pela fórmula

$$Cg = \frac{GM_{a(R)}}{R^2}, \quad (39)$$

onde $M_{a(R)}$ são todas as massas atmosféricas acima da esfera de raio de R . Cg deve ser adicionada a cada anomalia de gravidade, antes da aplicação da fórmula de Stokes. O efeito indireto no geóide, é considerado pequeno, da ordem de -7mm e desprezado. Por último, é adicionado no esferopotencial, o termo de grau zero da contribuição atmosférica,

$$U_0 = \frac{GM_a}{R}. \quad (40)$$

Para o cálculo da correção atmosférica, será adotado este modelo e usada a fórmula recomendada pela IAG (Moritz, 1992), desenvolvida por N. Pavlis e fornecida em (Sevilla, 1997), como uma das diversas disponíveis na literatura,

$$Cg_A = 0,8658 - 9,727 \times 10^{-5} H + 3,482 \times 10^{-9} H^2 \text{ mGal}. \quad (41)$$

(Sjöberg, 1999), argumenta que o uso do modelo teórico da atmosfera, recomendada pela IAG, numa área restrita como acontece nos cálculos de modelos geoidais locais ou regionais, acarreta erros sistemáticos nas alturas geoidais. Este erro é causado pelo truncamento da fórmula de Stokes a um determinado raio, variando segundo o autor entre $3,17 \text{ m}$ e $-2,23 \text{ m}$. Para um raio aproximado de 7° , como acontece neste trabalho, o erro nas alturas geoidais calculadas seria de $-0,24 \text{ m}$, o que de acordo com os resultados obtidos (apresentados no Capítulo 5) confirmaria o argumentado acima. O autor no mesmo trabalho, propõe uma aproximação diferente (não testada neste trabalho), desenvolvendo os efeitos até uma segunda ordem, a fim de minimizar os erros cometidos.

2.7.2 As massas terrestres e oceânicas

No caso destas massas, aplicam-se diversos tipos de correções para reduzir o valor da estação gravimétrica da superfície física terrestre ao geóide.

A correção *ar-livre* elimina o efeito das massas topográficas, abaixo da estação gravimétrica. Esta correção é calculada através do gradiente normal de gravidade (0,3086 mGal/m), redução que deve sofrer a gravidade observada, em função da altitude ortométrica da estação, para ser referida ao geóide. Desta forma, as massas são simplesmente eliminadas e a estação ficaria no ar, daí o nome da redução. Nenhum outro efeito é considerado. A fórmula de calculo é

$$\Delta g_{AL} = g_P + 0,3086H - \gamma_0, \quad (42)$$

onde Δg_{AL} é a anomalia ar-livre, g_P é a gravidade observada no ponto P , de altitude ortométrica H e γ_0 é a gravidade teórica para o mesmo ponto sobre o elipsóide.

A correção Bouguer, consiste de uma redução ar-livre, adicionada da consideração do efeito causado pela eliminação das massas entre a superfície terrestre e o geóide. A fórmula *completa* é expressa por

$$\Delta g_B = \Delta g_{AL} - 2\pi G\rho H + B + C, \quad (43)$$

Δg_B é a anomalia de Bouguer completa, o primeiro termo é a correção ar-livre, o segundo termo corresponde à componente vertical de atração exercida pelo plateau horizontal de altitude H estendido até o infinito. O efeito do plateau, aproxima-se ao produzido por uma calota da mesma espessura e raio esférico de 167 km. A anomalia Bouguer com apenas os dois primeiros termos considerados, é denominada de *anomalia Bouguer padrão*. O terceiro termo B , corrige o efeito do plateau, e o transforma na calota mencionada. (Gemael, 1999) e (Pessoa, 1997), fornecem uma Tabela e fórmula de cálculo do efeito do termo B , respectivamente. Finalmente o termo C , considera as irregularidades da superfície topográfica em relação à calota, sendo conhecido como *correção de terreno* ou *efeito direto do relevo topográfico* e será tratado nas seções 8 e 9.

A consideração da atração das massas existentes entre a região de 167 km e o resto do mundo, é feito com as reduções isostáticas seguindo as teorias de Pratt-Hayford ou Airy-Heiskanen (Gemael, 1999).

Um outro método de levar em consideração a topografia, é o denominado segundo método de Helmert (Heiskanen e Moritz, 1985; Sideris, 1997), o qual condensa as massas topográficas numa camada de densidade $\kappa = H\rho$ sobre a superfície do geóide. Assim, a massa

total da Terra não sofre alteração. O processo de cálculo, ilustrado na Figura 2, envolve as seguintes etapas:

- são removidas as massas acima do geóide (via a correção de Bouguer incluindo o efeito do relevo);
- a estação é reduzida ao geóide com a correção ar-livre;
- são restauradas todas as massas sobre o geóide, condensadas numa camada $\kappa = H\rho$, onde H é altitude ortométrica da estação e ρ é a densidade média das massas.

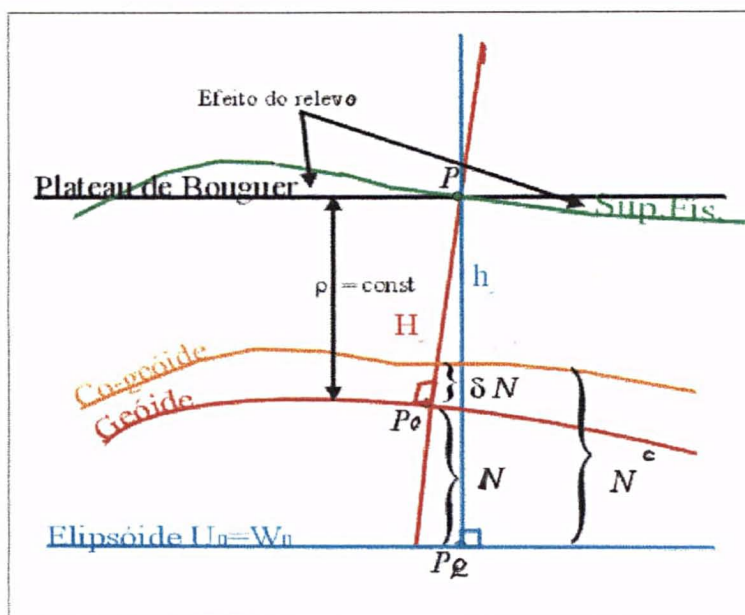


Figura 2. O método de condensação de Helmert e o co-geóide.

A Figura 2, mostra também o co-geóide ou geóide compensado, o qual é a superfície obtida com a aplicação da integral de Stokes a partir das anomalias gravimétricas reduzidas. A altura co-geoidal N^c obtida é transformada pela inclusão do efeito indireto δN , na altura geoidal N .

O efeito indireto, também denominado de contribuição inversa do relevo, no método de condensação é inferior a 1 m cada 3 km de altitude média (Heiskanen e Moritz, 1985), o que fornece uma idéia em termos gerais, que para o Uruguai, com uma altitude média de ≈ 70 m, a diferença co-geóide e geóide deveria ser inferior 0,03 m e estar no nível do ruído observacional.

O procedimento de condensação de Helmert, fornece as anomalias gravimétricas, calculadas pela seguinte expressão (Sideris, 1997):

$$\Delta g = \Delta g_{AL} - A_P + A_{P_0}^c = \Delta g_{AL} + \delta A, \quad (44)$$

na qual Δg_{AL} é a anomalia ar-livre, A_P é a anomalia associada ao potencial de atração da topografia entre o geóide e P , $A_{P_0}^c$ é a anomalia associada ao potencial de atração das massas condensadas em P_0 e δA é a anomalia associada à mudança no potencial causada pela condensação.

É claro que a mudança do potencial inclui, além da variação no potencial devido à redução, a variação devido ao deslocamento (redistribuição) das massas para a superfície do geóide. Isto cria o denominado "*efeito indireto*" no potencial, que é expresso por

$$\delta T = T_{P_0} - T_{P_0}^c \quad (45)$$

sendo T_{P_0} o potencial das massas topográficas em P_0 no geóide e $T_{P_0}^c$ é o potencial das massas condensadas no mesmo ponto.

Devido a esta variação do potencial, o uso da integral de Stokes com anomalias de gravidade fornecidas por (44), refere o elipsóide à superfície equipotencial, denominada co-geóide (ou geóide compensado). Assim, antes de aplicar a equação de Stokes, a anomalia de gravidade deve ser transformada do geóide para o co-geóide, aplicando a correção $\delta \Delta g$, denominada *efeito indireto na gravidade* (ver o efeito nas expressões (25a) e (25b)),

$$\delta \Delta g = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \delta T \quad (46)$$

O efeito indireto na gravidade é muito pequeno e normalmente é desprezado nos trabalhos de que se tem referência (Sevilla, 1997; Lyszkowicz e Forsberg, 1997; Poitevin *et al.* 1997), mas será considerado neste trabalho como mais um teste, sendo calculado junto com o efeito direto do terreno pelo programa *tc*.

A fórmula de Stokes, apenas com estas considerações⁶, é expressa (deixando em evidência os efeitos direto e indireto, nas anomalias e no potencial) por

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_S \left(\underbrace{\Delta g}_{\text{Anomalia ar-livre}} + \underbrace{\delta \Delta g}_{\text{Efeito indireto na gravidade}} + \underbrace{\delta A}_{\text{Efeito direto na gravidade}} \right) S(\psi) dS + \underbrace{\frac{1}{\gamma} \delta T}_{\text{Efeito indireto no potencial}} = \underbrace{N^c}_{\text{Ondulação no co-geóide}} + \underbrace{\delta N}_{\text{Efeito indireto no geóide}} = \underbrace{N}_{\text{ondulação no geóide}} \quad (47)$$

Em uma aproximação plana, tem sido demonstrado (Moritz, 1980; e Sideris, 1997) que δT e δA , podem ser calculados através do seguinte operador funcional \mathbf{L} ,

$$\mathbf{L}f = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{f - f_p}{l^3} dx dy ; \mathbf{L}^n = \frac{\partial^n}{\partial z^n} \quad (48)$$

onde o subscrito P indica o ponto de cálculo e l é a distância entre o ponto variável e o ponto de cálculo. Essa distância é expressa por

$$l = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2} \quad (49)$$

A variação do potencial δT , é calculada por

$$\delta T = -\pi G\rho H_p^2 - 2\pi G\rho \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)!} \mathbf{L}^{2r-1} H^{2r+1}, \quad (50)$$

e a variação do potencial de atração ou *efeito direto do relevo topográfico*⁷, é

$$\delta A = c = 2\pi G\rho \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r)!} \mathbf{L}^{2r-1} (H - H_p)^{2r}. \quad (51)$$

É importante lembrar que esta anomalia associada ao potencial de atração da topografia condensada δA , usado nas expressões (44) e (47), deve ser calculado na superfície geoidal, de maneira que a gravidade reduzida esteja referida ao co-geóide e possa ser usada como entrada na fórmula de Stokes.

Em termos gerais, a condensação de Helmert produz a anomalia de Faye (Moritz, 1980), ou seja anomalia ar-livre corrigida do relevo topográfico, sendo considerada fisicamente como uma redução isostática de Pratt-Hayford, quando a profundidade de compensação é zero. É claro que em zonas de topografia plana ou moderada, o método confunde-se com a simples anomalia ar-livre pois o efeito de terreno é pequeno. O próprio efeito direto do método é pequeno, já que neste caso, o efeito da camada de Helmert compensa à topografia removida.

Por isso (Heiskanen e Moritz, 1985), consideram que neste tipo de topografia, *"a simples redução ar-livre, pode considerar como a que fornece valores de contorno aproximados no geóide, a serem usados na fórmula de Stokes"*.

A vantagem oferecida pelo método de Helmert, é de satisfazer os requisitos da integral de Stokes sem produzir grandes modificações do potencial (o que leva a um co-geóide muito próximo do geóide) e de ser facilmente calculável. Estas últimas vantagens, assim como as considerações mencionadas anteriormente, foram a causa da escolha do método neste trabalho, na consideração dos efeitos topográficos nas anomalias gravimétricas.

⁶ As anomalias de gravidade foram previamente corrigidas do efeito atmosférico

2.8 A TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE N

O uso da integral de Stokes, pressupõe o conhecimento das anomalias em toda a superfície geoidal, numa forma contínua. Isto é impossível de conseguir até os dias de hoje, razão pela qual a integral apenas teve valor teórico, desde a sua formulação até este século, quando os valores de gravidade começaram a aumentar em quantidade e qualidade (Rapp, 1998). Na prática, as anomalias de gravidade são conhecidas em forma esparsa sobre parte da superfície terrestre. Assim, algumas modificações devem ser feitas para aplicar a integral na forma correta.

Em primeiro lugar, a integral é substituída por um somatório discreto, que opera sobre dados discretos e onde a densidade da informação gravimétrica, não é normalmente melhor que 5' x 5'. Em segundo lugar, ela é aplicada sobre uma área restrita e não sobre toda a Terra, ocasionando que a contribuição do resto do mundo (ou seja a externa à área de dados), não seja considerada. Assim, do ponto de vista espectral⁸, nas alturas geoidais calculadas estarão ausentes os comprimentos de onda maiores (resto do mundo) e menores (efeitos menores à densidade gravimétrica). A solução para o problema, está no uso de um modelo geopotencial de alto grau para estimar os comprimentos maiores e de um MTD de alta resolução (por ex. 1 km x 1 km), para os comprimentos de onda menores. Com a finalidade de não duplicar estes efeitos, previamente à aplicação da integral de Stokes, as contribuições mencionadas serão retiradas das anomalias, gerando anomalias residuais. Uma vez calculada a altura geoidal a partir das anomalias residuais, os efeitos retirados são re-introduzidos para obter as alturas geoidais finais.

Esta é a técnica de cálculo de *decomposição de N* , denominada em inglês "remove-restore". As contribuições de cada uma das parcelas espectrais mencionadas, são apresentadas na Figura a seguir.

⁷ De valor numérico igual à *correção clássica de terreno, c.*

⁸ O Anexo II, oferece conceitos gerais sobre Análise Espectral e Transformada de Fourier.

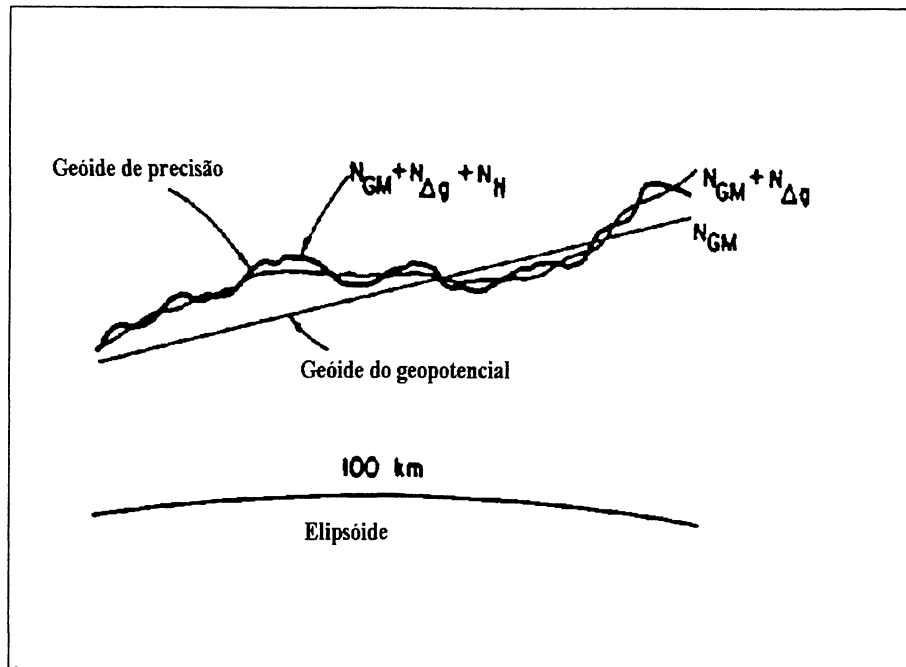


Figura 3. Contribuições espectrais no cálculo de um modelo geoidal de precisão.

Fonte: modificada de (Sideris, 1997).

Matematicamente, as anomalias residuais são calculadas com a expressão:

$$\Delta g^{res} = \Delta g_{AL} - \Delta g_{MG} - \Delta g_H, \quad (52)$$

sendo Δg_{AL} , a anomalia ar-livre; Δg_{MG} a contribuição do modelo geopotencial e Δg_H , a contribuição do relevo topográfico, na anomalia gravimétrica (expressão 51).

Este primeiro passo, consiste em retirar as contribuições de grande e pequeno comprimento de onda nos dados da área de integração. Após o cálculo das alturas geoidais residuais $N_{\Delta g^{res}}$, são reintroduzidas as componentes previamente retiradas, da forma

$$N = N_{MG} + N_{\Delta g^{res}} + N_H \quad (53)$$

sendo N_{MG} , a contribuição do modelo geopotencial e N_H o efeito indireto causado pelo relevo topográfico. As expressões matemáticas para cada um dos termos indicados acima, são apresentados na sequência.

A contribuição do modelo geopotencial, nas anomalias e nas alturas geoidais, necessárias para a aplicação da técnica de decomposição de N , são expressas por (Sideris, 1997):

$$\Delta g_{MG} = \bar{g} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (n-1) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda_p + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda_p) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi_p); \quad (54)$$

$$N_{MG} = R \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda_p + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda_p) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi_p), \quad (55)$$

nas quais \bar{C}_{nm} e \bar{S}_{nm} são os coeficientes do geopotencial plenamente normalizados (Lemoine *et al.*, 1998), \bar{P}_{nm} são as funções de Legendre plenamente normalizadas (Heiskanen e Moritz, 1985), n_{\max} é o máximo grau do modelo geopotencial, \bar{g} é o valor médio de gravidade e finalmente R é o raio médio da Terra. Note-se que a expressão (54), é a mesma que a (29), com diferente notação.

O cálculo da contribuição do modelo geopotencial nas anomalias gravimétricas, é feito através do programa *gravt_gm* que implementa as equações acima mencionadas, no qual pode-se escolher o grau máximo a ser considerado.

A contribuição correspondente às alturas geoidais N_{MG} , pode ser calculada com diferentes fórmulas. Aqui é apresentada, sucintamente, uma forma plana aproximada da fórmula de Stokes. Para distâncias pequenas⁹ dentro de uma área E , podemos usar uma aproximação plana, na qual o primeiro termo de $S(\psi)$ (expressão 34), é o principal e dominante.

Assim, tem-se (Heiskanen e Moritz, 1985)

$$\frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \approx \frac{2}{\psi} \approx \frac{2R}{l}. \quad (56)$$

A relação entre as coordenadas locais (x, y) e as esféricas (φ, λ) , é expressa através das fórmulas:

$$dx = R d\varphi \quad (57)$$

$$dy = R \cos \varphi d\lambda, \quad (58)$$

pelo qual, introduzindo o elemento de superfície:

⁹ (Heiskanen e Moritz, 1985), sugerem que para distâncias maiores a 400 km, devem ser usadas fórmulas esféricas para o cálculo das reduções gravimétricas e efeito indireto no potencial, distância superior à usada neste trabalho, que é de aproximadamente 1,5°.

$$dS = \frac{1}{R^2} dx dy, \quad (59)$$

a fórmula de Stokes, pode ser colocada sob a forma

$$N_P^{\Delta g} = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_E \frac{\Delta g}{l} dx dy \quad (60)$$

As contribuições, inversa ou do efeito indireto e direta do relevo em N , necessárias para a aplicação da técnica de decomposição de N , são expressas, considerando apenas os termos de primeiro grau nas equações (50) e (51) (Sideris, 1997)

$$\delta N_P = N_H = -\frac{\pi G \rho}{\gamma} H_P^2 - \frac{\pi G \rho}{3\gamma} L H^3 = -\frac{\pi G \rho}{\gamma} H_P^2 - \frac{G \rho}{6\gamma} \int_E \frac{H^3 - H_P^3}{l^3} dx dy \quad (61)$$

e

$$\begin{aligned} \delta A_P = c_P &= -\Delta g_H = \pi G \rho L (H - H_P)^2; \\ &= \pi G \rho [L H^2 - 2 H_P L H] = \frac{1}{2} G \rho \int_E \frac{(H - H_P)^2}{l^3} dx dy; \\ &= \frac{1}{2} G \rho \int_E \frac{H^2 - H_P^2}{l^3} dx dy - H_P G \rho \int_E \frac{H - H_P}{l^3} dx dy. \end{aligned} \quad (62)$$

2.9 A APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER¹⁰, NO CÁLCULO DO GEÓIDE

2.9.1 A fórmula de Stokes

Integrais da forma (60), onde se tem o produto de uma variável (Δg), que é função de uma posição espacial, multiplicada por outra que envolve uma diferença de posições ($1/l$), são denominadas integrais de convolução, sendo avaliadas rápida e eficientemente por técnicas de transformada rápida de Fourier (FFT). O teorema da convolução das transformada de Fourier, estabelece que o espectro da integral é equivalente a multiplicação dos espectros dos termos da integral. A exigência do método é apenas a de possuir os dados de entrada, na forma de malha ou reticulado. A formulação da maioria dos problemas geodésicos pode ser expressa em termos de convoluções, o que junto ao desenvolvimento da informática, leva aos modernos métodos de cálculo do geóide por FFT.

¹⁰ Ver o Anexo II, sobre as principais características e propriedades da série e a transformada de Fourier.

A altitude e a batimetria é fornecida normalmente, em malhas com espaçamento regular, pelo qual os métodos de FFT, são uma escolha ótima para cálculos envolvendo grande volume de dados. Usando as propriedades da FFT, são contornados os problemas de tempo e espaço de memória, no processamento de dados, substituindo as custosas adições numéricas por eficientes multiplicações no domínio espectral.

Como a FFT assume que a função seja periódica em x e y , a malha deve ser completada por uma zona de zeros (técnica de “zero padding”), senão os resultados próximos da borda de cálculo, devem ser eliminados. Como vantagem adicional do método, os resultados são fornecidos diretamente na forma de reticulado ou malha, adequada para interpolação e uso direto.

Na seqüência, são apresentadas diversas aproximações no cálculo da fórmula de Stokes, usando FFT, sendo que os detalhes dos programas podem ser consultados no Anexo III e os resultados práticos obtidos, no Capítulo 5.

2.9.1.1 A fórmula de Stokes para o plano

Usando uma aproximação plana da Terra como foi expresso acima ((56), (57), (58), (59) e (60)), numa área restrita E , a fórmula de Stokes é expressa, na forma de integral de convolução em duas dimensiones, por (Sideris, 1997)

$$N_{\Delta g}(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_E \frac{\Delta g(x, y)}{\sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}} dx dy = \frac{1}{2\pi\gamma} \Delta g(x_p, y_p) * I_N(x_p, y_p), \quad (63)$$

onde I_N , é a forma plana do núcleo da função de Stokes:

$$I_N = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{-1/2} \quad (64)$$

A expressão (63) é avaliada por meio de duas transformadas direta de Fourier e uma indireta, da forma:

$$N_{\Delta g}(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \{F[\Delta g(x, y)] F[I_N(x, y)]\} = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \{\Delta G(u, v) L_N(u, v)\} \quad (65)$$

As fórmulas para dados médios e pontuais de anomalias gravimétricas, são apresentados na seqüência.

Se as anomalias gravimétricas $\bar{\Delta g}$, são de tipo *médio* e estão fornecidos na forma de uma *malha* de $M \times N$, filas e colunas, com espaçamento Δx e Δy , a altura geoidal no ponto de coordenadas (x_k, y_l) , pode ser avaliada pela seguinte convolução discreta (Sideris, 1997):

$$N_{\Delta g}(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta g(x_i, y_j) * \bar{l}_N(x_k - x_i, y_l - y_j), \quad (66)$$

sendo,

$$\begin{aligned} \bar{l}_N(x_k, y_l) &= \int_{x_k - \Delta x/2}^{x_k + \Delta x/2} \int_{y_l - \Delta y/2}^{y_l + \Delta y/2} \frac{1}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}} dx dy \\ &= x \ln \left(y + (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} \right) + y \ln \left(x + (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} \right) \Bigg|_{x_k - \Delta x/2}^{x_k + \Delta x/2} \Bigg|_{y_l - \Delta y/2}^{y_l + \Delta y/2} \end{aligned} \quad (67)$$

A expressão (66), é avaliada pela FFT, através da seguinte expressão:

$$N_{\Delta g}(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \left\{ F[\Delta g(x_k, y_l)] F[\bar{l}_N(x_k, y_l)] \right\} = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} [\Delta G(u_m, v_n) \bar{L}_N(u_m, v_n)], \quad (68)$$

Esta fórmula está incluída no programa *fftgeoid* (Li, 1994a), como opção 1, de cálculo de alturas geoidais e será usada neste trabalho, a fim de testar e comparar resultados.

Se os dados de anomalias gravimétricas são de tipo *pontual* e são fornecidos na forma de uma *malha* de $M \times N$, filas e colunas, com espaçamento Δx e Δy , a altura geoidal no ponto de coordenadas (x_k, y_l) , pode ser avaliada pela seguinte convolução discreta

$$N_{\Delta g}(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta g(x_i, y_j) * l_N(x_k - x_i, y_l - y_j) \Delta x \Delta y, \quad (69)$$

sendo,

$$l_N(x_k - x_i, y_l - y_j) = \begin{cases} \left[(x_k - x_i)^2 + (y_l - y_j)^2 \right]^{1/2}, & \text{se } x_k \neq x_i \text{ ou } y_l \neq y_j \\ 0, & \text{se } x_k = x_i \text{ e } y_l = y_j \end{cases} \quad (70)$$

Para evitar a singularidade de l_N , o núcleo é fixado em zero na origem e a contribuição da anomalia de gravidade no ponto de cálculo, é avaliada separadamente. Essa contribuição é dada por (Heiskanen e Moritz, 1985)

$$\kappa N(x_k, y_l) \approx \frac{(\Delta x \Delta y)^{1/2}}{\gamma (\pi)^{1/2}} \Delta g(x_k, y_l). \quad (71)$$

A avaliação da expressão (69), por FFT é feita do seguinte modo:

$$N_{\Delta g}(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \{ F[\Delta g(x_k, y_l)] F[l_N(x_k, y_l)] \} = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} [\Delta G(u_m, v_n) L_N(u_m, v_n)] \quad (72)$$

onde para distinguir os núcleos definidos pelas expressões (67) e (70), denomina-se na primeira delas, o espectro médio do núcleo de Stokes como \bar{l}_N . Esta fórmula é incluída no programa *fftgeoid*, como opção 2 no cálculo de alturas geoidais, não sendo usada neste trabalho por serem os dados gravimétricos disponíveis de tipo médio, ou seja uma malha calculada a partir de interpolação de dados pontuais.

2.9.1.2. A fórmula de Stokes para a esfera

As aproximações introduzidas pelo uso da fórmula de Stokes na forma plana, podem ser reduzidas ou eliminadas usando diretamente a forma esférica já apresentada na expressão (36).

Usando o núcleo definido por (34),

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right), \quad \text{a fórmula de Stokes é}$$

expressa em forma explícita como (Sideris 1997 e Tziavos, 1996)

$$N(\varphi_p, \lambda_p) = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_E \Delta g(\varphi, \lambda) S(\varphi_p, \lambda_p, \varphi, \lambda) \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda, \quad (73)$$

que na forma discreta, com anomalias gravimétricas em forma de malha, é expressa por:

$$N(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} \Delta g(\varphi_j, \lambda_i) S(\varphi_l, \lambda_k, \varphi_j, \lambda_i) \cos \varphi_j \, \Delta\varphi \, \Delta\lambda \quad (74)$$

Por meio de diferentes aproximações deste núcleo esférico, as alturas geoidais são calculadas com FFT bi e unidimensionais. Algumas destas aproximações serão apresentadas na sequência.

2.9.1.2.1 O núcleo esférico aproximado

Para transformar a expressão (74), numa integral de convolução, tem sido sugerido (Sideris 1997), aproximar $\cos \varphi_p \cos \varphi$ presente no termo da expressão (34):

$$\sin^2 \psi / 2 = \sin^2 \frac{\varphi_p - \varphi}{2} + \sin^2 \frac{\lambda_p - \lambda}{2} \cos \varphi_p \cos \varphi, \quad (75)$$

pelas expressões: $\cos^2 \bar{\varphi} - \sin^2 (\varphi_P - \varphi)/2$ ou $\cos^2 \bar{\varphi}$, onde $\bar{\varphi}$ é uma latitude média, da área considerada.

Assim o núcleo da integral de Stokes assume uma das formas:

$$\sin^2 \psi/2 \approx \sin^2 \frac{\varphi_P - \varphi}{2} + \sin^2 \frac{\lambda_P - \lambda}{2} \left(\cos^2 \bar{\varphi} - \sin^2 (\varphi_P - \varphi)/2 \right), \text{ ou} \quad (76)$$

$$\approx \sin^2 \frac{\varphi_P - \varphi}{2} + \sin^2 \frac{\lambda_P - \lambda}{2} \cos^2 \bar{\varphi} \quad (77)$$

Com estas considerações, a expressão (74) na forma de integral de convolução é expressa por

$$\begin{aligned} N(\varphi_l, \lambda_k) &= \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} \Delta g(\varphi_j, \lambda_i) S(\varphi_l - \varphi_j, \lambda_k - \lambda_i, \bar{\varphi}) \cos \varphi_j \Delta \varphi \Delta \lambda \\ &= \frac{R}{4\pi\gamma} [\Delta g(\varphi_l, \lambda_k) \cos \varphi_l] * S(\varphi_l, \lambda_k, \bar{\varphi}) \end{aligned} \quad (78)$$

Esta equação é avaliada por FFT bidimensional por meio de

$$N(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} F^{-1} \{ F [\Delta g(\varphi_l, \lambda_k) \cos \varphi_l] F [S(\varphi_l, \lambda_k, \bar{\varphi})] \} \quad (79)$$

Esta aproximação, permite calcular alturas geoidais, rápida e simultaneamente, para grandes regiões e para todos os pontos da malha (Sideris, 1997). A desvantagem está na grande quantidade de memória necessária, devido ao uso da técnica de "zero padding". A expressão (78), com a aproximação dada na (77), está implementada como opção 4 do programa *ffigeoid*, sendo avaliada através da FFT, expressa na (79) e será usada para testes e comparação, com as outras opções disponíveis.

2.9.1.2.2 O núcleo esférico rigoroso

Para reduzir os erros introduzidos nas aproximações mencionadas anteriormente, (Sideris 1997 e Tziavos, 1996), aproveitam o fato de que a FFT na forma esférica, fornece alturas geoidais exatas para todos os pontos localizados sobre o mesmo paralelo de latitude média. Usando esta propriedade e o teorema da adição das transformadas de Fourier, é proposta uma técnica de cálculo, que permite avaliar rigorosamente a integral na forma discreta, usando a FFT unidimensional.

Considerando que para calcular as alturas geoidais de um certo paralelo φ_i , usando dados de um outro paralelo φ_j , ψ muda apenas $\lambda_k - \lambda_i$, e Δg muda com λ_i , a integral bidimensional pode ser expressa pela seguinte integral de convolução:

$$N(\varphi_i, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{M-1} \Delta g(\varphi_j, \lambda_i) \cos \varphi_j S(\varphi_i, \varphi_j, \Delta \lambda_i) \Delta \lambda \right] \Delta \varphi \quad (80)$$

com $\varphi_i = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Note-se que o termo entre colchetes, contém uma convolução discreta unidimensional. Usando o teorema da adição das FFT, a expressão é avaliada através de

$$N(\varphi_i, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} F_1^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} F_1 [\Delta g(\varphi_j, \lambda_i) \cos \varphi_j] F_1 [S(\varphi_i, \varphi_j, \Delta \lambda)] \right\}, \quad (81)$$

onde F_1 e F_1^{-1} , representam a transformada direta e inversa respectivamente, fornecendo as alturas geoidais para todos os pontos de cada paralelo φ_i . Estes resultados, aliás, são iguais aos da integração numérica da fórmula de Stokes, possuindo este método a vantagem de necessitar menos memória que o anterior procedimento, já que apenas precisa de um vetor unidimensional complexo em cada paralelo calculado. A desvantagem está no maior tempo de processamento requerido, se comparado com o método bidimensional.

A avaliação da expressão (81) é a opção 5 do programa *fftgeoid* e foi a principal opção escolhida para o cálculo das alturas geoidais neste trabalho, devido a estas razões expostas de rigorosidade.

2.9.2 Os efeitos do relevo topográfico

Os efeitos do relevo têm sido intensivamente considerados por (Forsberg, 1997; Sideris, 1997; Sjöberg, 1996; e Nahavandchi e Sjöberg, 1998). As principais considerações já foram apresentadas, portanto será fornecida apenas a formulação matemática usada nos programas de cálculo. Os programas fornecidos pela Escola do Geóide para estes cálculos, são três, a saber: *tc2dfipl* (Li, 1994b e Sideris, 1997), *tc* e *tcfour* (Forsberg, 1997). Os três foram usados e testados neste trabalho, oferecendo-se na sequência, a formulação matemática de cada um deles, no Anexo III os detalhes das diversas opções de entrada e saída para o seu uso e os testes realizados, no Capítulo 5 - Resultados.

2.9.2.1 O programa *tc2dfipl*

Para os efeitos do relevo topográfico, consideram-se as seguintes expressões:

O núcleo da função representa-se por

$$l_c = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{-3/2}, \quad (82)$$

a correção de terreno fornecida por (62), pode ser escrita nas seguintes formas equivalentes de convolução¹¹:

$$\begin{aligned} c(x_p, y_p) &= \frac{1}{2} G\rho \int_E \frac{[h(x, y) - h(x_p, y_p)]^2}{[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]^{3/2}} dx dy \\ &= \frac{1}{2} G\rho \int_E \frac{h^2(x, y) - 2h(x_p, y_p)h(x, y) + h^2(x_p, y_p)}{[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]^{3/2}} dx dy \\ &= \frac{1}{2} G\rho \left\{ h^2(x, y) * l_c(x_p, y_p) - 2h(x_p, y_p)[h(x, y) * l_c(x_p, y_p)] \right. \\ &\quad \left. + h^2(x_p, y_p)[o(x_p, y_p) * l_c(x_p, y_p)] \right\} \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} c(x_p, y_p) &= \frac{1}{2} G\rho \int_E \frac{h^2(x, y) - h^2(x_p, y_p)}{[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]^{3/2}} dx dy \\ &\quad - h(x_p, y_p) G\rho \int_E \frac{h(x, y) - h(x_p, y_p)}{[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]^{3/2}} dx dy \\ &= \frac{1}{2} G\rho \left\{ h^2(x, y) * l_c(x_p, y_p) - h^2(x_p, y_p)[o(x_p, y_p) * l_c(x_p, y_p)] \right. \\ &\quad \left. - 2h(x_p, y_p)[h(x, y) * l_c(x_p, y_p)] - h(x_p, y_p)[o(x_p, y_p) * l_c(x_p, y_p)] \right\} \end{aligned} \quad (84)$$

onde $o(x, y) = 1$, para todos os pontos do reticulado.

Em forma semelhante, o efeito indireto no geóide, quantificado pela expressão (61), pode ser escrito na forma da convolução

$$\begin{aligned} \delta N(x_p, y_p) &= -\frac{\pi G\rho}{\gamma} h^2(x_p, y_p) - \frac{G\rho}{6\gamma} \iint_E \frac{h^3(x, y) - h_p^3(x_p, y_p)}{[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]^{3/2}} dx dy \\ &= \frac{\pi G\rho}{\gamma} h^2(x_p, y_p) - \frac{G\rho}{6\gamma} \{ h^3(x, y) * l_c(x_p, y_p) - h^3(x_p, y_p)[o(x_p, y_p) * l_c(x_p, y_p)] \} \end{aligned} \quad (85)$$

A singularidade dessas fórmulas, novamente é resolvida fixando-se $l_c(0, 0) = 0$. Isto não acarreta consequências práticas, já que as fórmulas acima contém diferenças de altitude, que serão zero quando $x = x_p$ e $y = y_p$. A expressão (83), tem sido mais usada devido a que requer menos transformadas de Fourier para a sua aplicação.

Usando transformadas de Fourier, as expressões 83, 84 e 85, são avaliadas na seguinte forma:

$$c(x, y) = \frac{1}{2} G \rho \left\{ F^{-1} [H_2(u, v) L_c(u, v)] - 2h(x_p, y_p) F^{-1} [H(u, v) L_c(u, v)] \right. \\ \left. + h^2(x_p, y_p) F^{-1} [O(u, v) L_c(u, v)] \right\} \quad (86)$$

$$c(x, y) = \frac{1}{2} G \rho \left\{ F^{-1} [H_2(u, v) L_c(u, v)] - h^2(x_p, y_p) F^{-1} [O(u, v) L_c(u, v)] \right. \\ \left. - 2h(x_p, y_p) F^{-1} [H(u, v) L_c(u, v)] - h(x_p, y_p) F^{-1} [O(u, v) L_c(u, v)] \right\} \quad (87)$$

$$\delta N(x, y) = -\frac{\pi G \rho}{\gamma} h^2(x_p, y_p) - \frac{G \rho}{6\gamma} \left\{ F^{-1} [H_3(u, v) L_c(u, v)] - h^3(x_p, y_p) F^{-1} [O(u, v) L_c(u, v)] \right\} \quad (88)$$

sendo $H_i(u, v) = F^{-1} \{ h^i(x, y) \}$ para $i=2,3$, $O(u, v) = F^{-1} \{ o(x, y) \}$ e $L_c(u, v) = F^{-1} \{ l_c(x, y) \}$.

Se os dados de entrada são *altitudes pontuais, em forma de um reticulado* de $M \times N$ altitudes, a expressão (83) pode ser substituída por

$$c(x_k, y_l) = \frac{1}{2} G \rho \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{[h(x_i, y_l) - h(x_k, y_l)]^2}{[(x_k - x_i)^2 + (y_l - y_j)^2]^{3/2}} \Delta x \Delta y \quad (89)$$

que é avaliada pela seguinte expressão usando FFT:

$$c(x_k, y_l) = \frac{1}{2} G \rho \left\{ F^{-1} [H_2(u_m, v_n) L_c(u_m, v_n)] - 2h(x_k, y_l) F^{-1} [H(u_m, v_n) L_c(u_m, v_n)] \right. \\ \left. + h^2(x_k, y_l) F^{-1} [O(u_m, v_n) L_c(u_m, v_n)] \right\} \quad (90)$$

Para evitar convoluções circulares, aplica-se a técnica de "zero padding", o que leva a fixar $o(x, y)=1$, nos pontos com dados altimétricos e $o(x, y)=0$, nos pontos adicionados.

Se os *dados altimétricos* constituem uma *malha* $M \times N$ de *altitudes médias*, as equações são:

$$c(x_k, y_{pl}) = \frac{1}{2} G \rho \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} [\bar{h}(x_i, y_l) - \bar{h}(x_k, y_l)]^2 \bar{l}_c(x_k - x_i, y_k - y_l) \quad (91)$$

com

$$\bar{l}_c(x_k, y_l) = \int_{x_k - \Delta x/2}^{x_k + \Delta x/2} \int_{y_l - \Delta y/2}^{y_l + \Delta y/2} \frac{1}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{3/2}} dx dy = \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}}{\Delta x \Delta y} \Bigg|_{x_k - \Delta x/2}^{x_k + \Delta x/2} \Bigg|_{y_l - \Delta y/2}^{y_l + \Delta y/2} \quad (92)$$

¹¹ A altitude ortométrica, será nestas expressões a seguir simbolizada por h , com efeito de distinguir entre a função da altitude h e o espectro correspondente H .

denominando o espectro médio do núcleo \bar{l}_c como \bar{L}_c , a expressão (91), é avaliada através da FFT por

$$c(x_k, y_l) = \frac{1}{2} G \rho \left\{ F^{-1} \left[\bar{H}_2(u_m, v_n) \bar{L}_c(u_m, v_n) \right] - 2 \bar{h}(x_k, y_l) F^{-1} \left[\bar{H}(u_m, v_n) \bar{L}_c(u_m, v_n) \right] \right. \\ \left. + \bar{h}^2(x_k, y_l) F^{-1} \left[O(u_m, v_n) \bar{L}_c(u_m, v_n) \right] \right\} \quad (93)$$

O programa *tc2dftpl*, implementa o efeito direto do relevo, através da FFT bidimensional aplicada sobre integrais de convolução como as expostas. As fórmulas representam o terreno por meio de duas formas diferentes: por prismas ou por colunas lineares no ponto. Os efeitos de relevo na expressão (51), são considerados até a terceira ordem, permitindo um grande refinamento do cálculo. Além disso, alguns parâmetros especiais do programa permitem aumentar a velocidade de convergência da série. Testes feitos em áreas de topografia montanhosa, tem demonstrado que a representação prismática, assim como a consideração dos efeitos até a terceira ordem fornecem os melhores resultados nos cálculos de geóide (Li, 1994b).

2.9.2.2 O programa *tc*

2.9.2.2.1 Cálculo do efeito do relevo topográfico usando prismas

O prisma retangular de densidade constante, é uma ferramenta básica para as integrações numéricas do efeito topográfico. Para um ponto P na origem do sistema de coordenadas, o efeito na gravidade, devido a um prisma retangular da topografia, no intervalo de coordenadas $x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2$, será:

$$\delta g_m = G \rho \left[x \log(y+r) + y \log(x+r) - z \arctan \frac{xy}{zr} \right] \left| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right| \quad (94)$$

$$\text{com } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A correspondente fórmula para o potencial (e então para a altura geoidal), é

$$T_m = G \rho \left[xy \log(z+r) + xz \log(y+r) + yz \log(x+r) \right. \\ \left. - \frac{x^2}{2} \arctan \frac{yz}{xr} - \frac{y^2}{2} \arctan \frac{xz}{yr} - \frac{z^2}{2} \arctan \frac{xy}{zr} \right] \left| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right| \quad (95)$$

Estas fórmulas devem ser incluídas no cálculo rigoroso da anomalia da gravidade, dada pela expressão (26)

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T$$

Quando os efeitos topográficos são calculados o segundo termo (desenvolvido na expressão (28)) é chamado *efeito indireto na gravidade* e é explicado usando o conceito de redução da gravidade do geóide ao co-geóide, como foi mostrado na seção 7 deste Capítulo. O efeito indireto geralmente é desprezado em áreas de topografia suave, onde os efeitos no geóide são pequenos (normalmente menores a 1 m, ou seja a 0,3 mGal) (Forsberg, 1997). Neste trabalho, foi considerado este efeito como mais um teste, o qual será mostrado nos Capítulos 5 e 6.

As fórmulas de atração gravitacional para prismas retangulares são numericamente instáveis para grandes distâncias (envolvem diferenças pequenas de números grandes, correspondentes aos vértices dos prismas).

2.9.2.2.2 Cálculo do efeito do relevo topográfico pelas fórmulas de Mc Millan

As fórmulas aproximadas são melhores para distâncias de cálculo grandes e baseiam-se no desenvolvimento de um campo prismático em harmônicos esféricos, fornecendo expressões mais simples, da forma (Mc Millan, 1958)

$$T_m = G\rho \Delta x \Delta y \Delta z \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{24r^5} \left[(2\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2)x^2 + (-\Delta x^2 - 2\Delta y^2 - \Delta z^2)y^2 + (-\Delta x^2 - \Delta y^2 - 2\Delta z^2)z^2 + \frac{1}{288r^9}(\alpha x^4 + \beta y^4 + \dots) \right] \right\} \quad (96)$$

$$\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1, \Delta z = z_2 - z_1$$

Esta equação é facilmente diferenciável para outras quantidades do campo gravitacional. O programa *tc*, usa estas fórmulas aproximadas na integração dos prismas. Para aumentar a velocidade de cálculo é usada uma malha menos detalhada para a topografia afastada. A malha detalhada é usada nos cálculos da zona interior do ponto e a outra (menos detalhada ou com espaçamento maior), para a topografia restante. Na pequena zona interna de tamanho 3 x 3 quadrículas, os dados são densificados com interpolação, em prismas menores de forma a

obter o efeito da zona (Figura 4), que é a contribuição maior, no efeito total. Esta densificação é de importância para evitar o efeito de calcular o ponto P no vértice de um prisma.

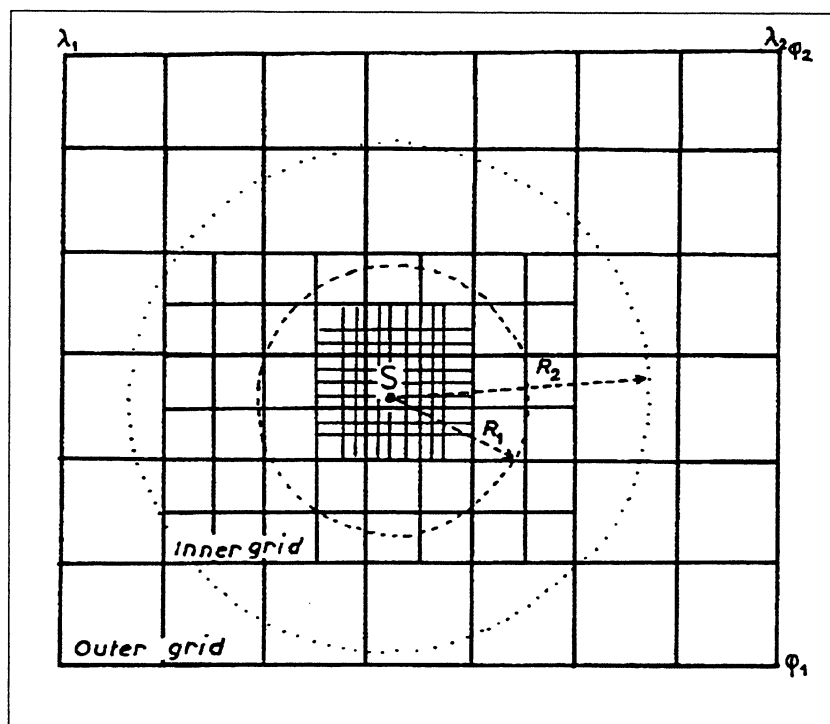


Figura 4. Uso da zona interior no programa *tc*. Fonte: (Forsberg, 1997)

Como os efeitos de terreno são muito dependentes da altitude através do termo $2\pi G\rho h$, deve-se ter um cuidado especial quando a altitude do ponto calculado não concorda com a altura interpolada do MTD. O ponto deve ser levado ao MTD, ou a topografia local deve-se modificar para dar o valor correto do ponto. A modificação no programa *tc*, é feita através de uma correção da zona interior.

Na Figura 5 a seguir, o MTD é representado pelo traço contínuo e a modificação dele, para aproximar-se do ponto de cálculo P, é o traço pontilhado. As diferenças entre o MTD e a altitude da estação, estarão sempre presentes já que dificilmente o MTD terá uma resolução suficiente para representar toda a topografia.

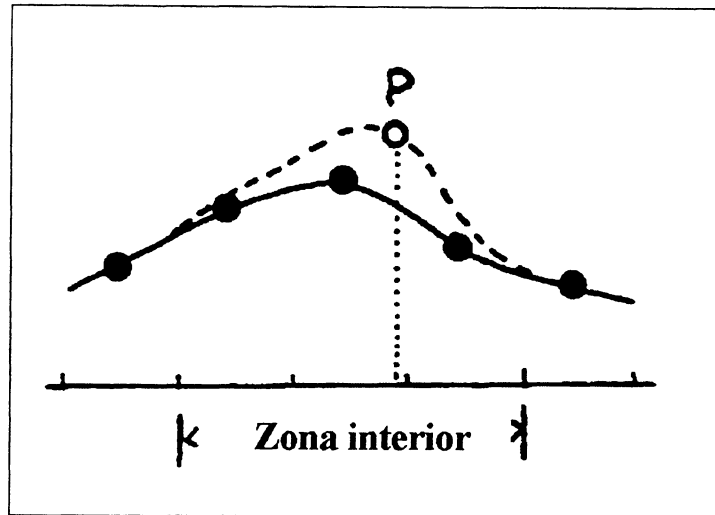


Figura 5. Modificação das altitudes do terreno na zona interior.

Fonte: modificada de (Forsberg, 1997).

2.9.2.3 O programa *tcfour*

A formulação matemática deste programa segue o desenvolvimento apresentado nas expressões (62), (82), (83), (84), (86) e (87), as diferenças decorrem da notação usadas pelos diferentes autores e a sua implementação nos programas testados, sendo esta a causa da apresentação na sequência. Na integral plana de correção

$$c_P = G\rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{h_p}^h \frac{z - h_p}{r^3} dx dy dz, \quad r = \sqrt{(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2 + (z_P - z)^2} \quad (97)$$

O núcleo da integral, para áreas pequenas, pode-se aproximar por (82),

$$\frac{1}{r^3} \approx \frac{1}{r_0^3}, \quad r_0 = \sqrt{(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2}. \quad (98)$$

Assim, a integração de z , em (99) é:

$$c_P = \frac{1}{2} G\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(h - h_p)^2}{r_0^3} dx dy. \quad (99)$$

Esta fórmula não é uma convolução, mas desenvolvendo o integrando, é obtido um conjunto de convoluções em h e h^2 :

$$c_p = \frac{1}{2} G \rho \left[h^2 * f - 2h_p(h * f) + h_p^2 f_0 \right], \quad (100)$$

com $f = (x^2 + y^2)^{3/2} e$

$$f_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r_0^3} dx dy \quad (101)$$

a singularidade de r_0^{-3} a distância zero não apresenta problemas na prática, enquanto são usados dados discretos, a expressão (98) será independente do valor zero no núcleo da função.

2.9.2.4 O efeito indireto, programa *ind*

O efeito indireto no potencial já apresentado (expressões (28), (61) e (85) e (91)), é calculado por FFT pelo programa *ind* (Sideris, 1997), onde, introduzindo uma altitude média da área de cálculo, os efeitos são calculados até uma terceira ordem. A fórmula implementada no programa é:

$$\delta N = \delta N_0 + \delta N_1 + \delta N_2, \quad (102)$$

sendo:

$$\delta N_0 = \frac{-\pi G \rho h^2}{\gamma}; \quad (103)$$

$$\delta N_1 = \frac{G \rho}{\gamma} \left[\int \frac{h - h_p}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_m^2}} dx dy - \int \frac{h - h_p}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \right]; e \quad (104)$$

$$\delta N_2 = -\frac{G \rho}{6\gamma} \left[\int \frac{h^3 - h_p^3}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + h_m^2}\right)^3} dx dy \right] + \frac{G \rho h_m^2}{2\gamma} \left[\int \frac{h - h_p}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + h_m^2}\right)^3} dx dy \right]. \quad (105)$$

h_m , é a altitude média da área de cálculo.

δN_0 , representa a parte regular ou normal e $\delta N_1 + \delta N_2$, a parte irregular da fórmula. Os resultados dos diferentes termos e a sua soma, são armazenados respectivamente nos arquivos de saída **indrt0.dat**, **indrt1.dat**, **indrt2.dat** e **indrt.dat**.

2.10 AVALIAÇÃO DE MODELOS GEOIDAIS

Na Figura 2, p. 17, a soma da altura geoidal N , e da altitude ortométrica H , é aproximadamente igual a altitude elipsoidal da estação, se desprezarmos a não co-linearidade¹⁰ da vertical e a normal no ponto, ou seja,

$$h \cong H + N, \quad (106)$$

esta é a denominada fórmula de Vilarceau (Torge, 1991).

Esta fórmula, permite obter a altura geoidal se as correspondentes altitudes são conhecidas, da forma¹¹:

$$N_{GPS} = h - H \quad (107)$$

Assumindo que a altura geoidal calculada com um modelo geoidal N_{GEOI} , e a obtida com a expressão (107), N_{GPS} , têm a mesma origem e paralelismo nos eixos coordenados, pode-se fazer uma comparação entre as duas. Neste método, usado na primeira avaliação dos modelos geoidais calculados (pontos isolados ou absolutos), a comparação é expressa por

$$DN = N_{GPS} - N_{GEOI} = h - H - N_{GEOI}, \quad (108)$$

sendo a análise, feita sobre grandes conjuntos de dados. Neste trabalho, as condições da origem e paralelismo mencionadas são satisfeitas para os modelos geopotenciais usados, devido a estarem baseados no sistema WGS84.

A denominação de altitude ortométrica, nos parágrafos anteriores, não implica que a altitude seja rigorosamente ortométrica na sua definição. No caso do Uruguai para as redes de alta precisão do país, foi feito um ajustamento por Método de Mínimos Quadrados, dos desníveis *corrigidos apenas do efeito de não paralelismo das superfícies equipotenciais* (a chamada **correção ortométrica** o que ocasiona certa confusão na terminologia) (Gemael, 1999).

¹⁰ Um ângulo de 1' de diferença entre a vertical e a normal, causa para uma altitude de 2 km, uma diferença na altura geoidal de 0,02 mm.

¹¹ A denominação de N_{GPS} , é porque neste trabalho as altitudes elipsoidais são exclusivamente provenientes de levantamentos GPS).

Uma melhor avaliação, é feita quando comparadas as diferenças de alturas geoidais entre estações. A vantagem obtida, é a redução dos erros principais de maior comprimento de onda dos modelos, incluindo os desvios sistemáticos entre diferentes sistemas de referência.

Matematicamente a diferença entre dois pontos é expressa por

$$\Delta N = N_2 - N_1, \quad (109)$$

sendo N_2 e N_1 as alturas geoidais, obtidas com a expressão (107) nas estações 2 e 1, respectivamente.

A diferença entre duas estações GPS é,

$$\Delta N_{GPS} = (h_2 - h_1) - (H_2 - H_1). \quad (110)$$

O valor assim obtido é comparado com a correspondente diferença fornecida pelo modelo geoidal:

$$\Delta DN = \Delta N_{GPS} - \Delta N_{GEOI} = (h_2 - h_1) - (H_2 - H_1) - (N_{GEOI}^2 - N_{GEOI}^1), \quad (111)$$

e relacionado às distâncias existentes entre estações, a fim de estabelecer o erro relativo por km entre estações.

Com o último procedimento mencionado, será efetuada a segunda avaliação dos modelos geoidais, denominada de *relativa*.

CAPÍTULO 3 - DESCRIÇÃO DOS DADOS DISPONÍVEIS

Neste Capítulo, em primeiro lugar são apresentadas algumas considerações referente aos sistemas de referência em que os diferentes dados estão baseados, as resoluções dos mesmos e a área de abrangência de cada um deles. Na seção 1, mostra-se uma relação dos dados e respectivas fontes. Na seção 2, são feitas considerações acerca dos dados apresentados. A seção 3, esclarece algumas restrições e limitações que o uso dos dados impõe nos cálculos realizados. Finalmente a seção 4, estabelece as principais constantes e valores usadas neste trabalho.

O sistema de referência geodésico adotado neste trabalho, visando a compatibilidade dos dados, foi o WGS84 (G873) (NIMA, 1998). Assim, o principal objetivo do modelo, ou seja, a transformação das altitudes geométricas em ortométricas, é adequadamente atendido, uma vez que as observações GPS estão diretamente relacionadas a este sistema. As bases de dados, topográfica local e gravimétrica, foram previamente transformadas para o sistema geodésico WGS84. Além disso, o sistema de referência sendo atualmente adotado no Uruguai, baseado no SIRGAS, é compatível a nível cartográfico e para o fim que se destina este trabalho com o WGS84.

O sistema de referência vertical oficialmente adotado no Uruguai, foi definido em 1948,0; e apresenta um desvio sistemático, ainda não determinado, de aproximadamente +0,50 m em relação a um datum global. Este resultado, foi obtido a partir da diferença de 16 observações GPS sobre RNS (Subiza, 1999a) e pode ser considerado semelhante a um termo de ondulação geoidal zero¹² para a região.

Com relação a área geográfica, necessária para cada tipo de dado, pode-se estabelecer:

↪ A área do Uruguai, objetivo do trabalho, está contida entre os paralelos -30° e -35 e os meridianos 301,5° (-58,5°) e 307° (- 53°);

↪ O uso de um modelo geopotencial de alto grau, no processo de decomposição das alturas geoidais, implica que a contribuição gravimétrica externa à área de cálculo, não deveria ir além de 1°, para não sobrepor componentes espectrais. Para o caso deste trabalho, a área gravimétrica necessária está situada entre os paralelos -29° e -36° e os meridianos 300° e 308° (-60° e - 52°), onde foi tomado por razões de manejo mais simples de dados e segurança, uma área um pouco maior.

¹² Reconhece-se que pela limitação regional dos dados, assim como o seu pequeno número, constitui apenas um indicativo de desvio, fato confirmado pelo nivelamento geométrico regional.

↪ A densidade dos dados diretamente observados (levantamentos de campo com gravímetros absolutos ou relativos), na área expressa anteriormente é variável. No caso do Uruguai, possui-se uma estação a cada 8 km aproximadamente, o que pode ser considerado uma densidade adequada aos objetivos propostos. No resto da área terrestre, a cobertura diminui para 1 estação cada 15-20 km, chegando em alguma situação específica a 30 km;

↪ O efeito da topografia, necessário para a aplicação do método de condensação, deve ser calculado até $1,5^\circ$ aproximadamente fora da área da cobertura gravimétrica (correção de Bouguer até a zona O de 167 km). Sendo assim, os dados topográficos necessários, ficaram entre os paralelos -27° e -38° e os meridianos 298° (-62°) e 310° (-50°).

A Figura 6, esclarece a distribuição descrita anteriormente.

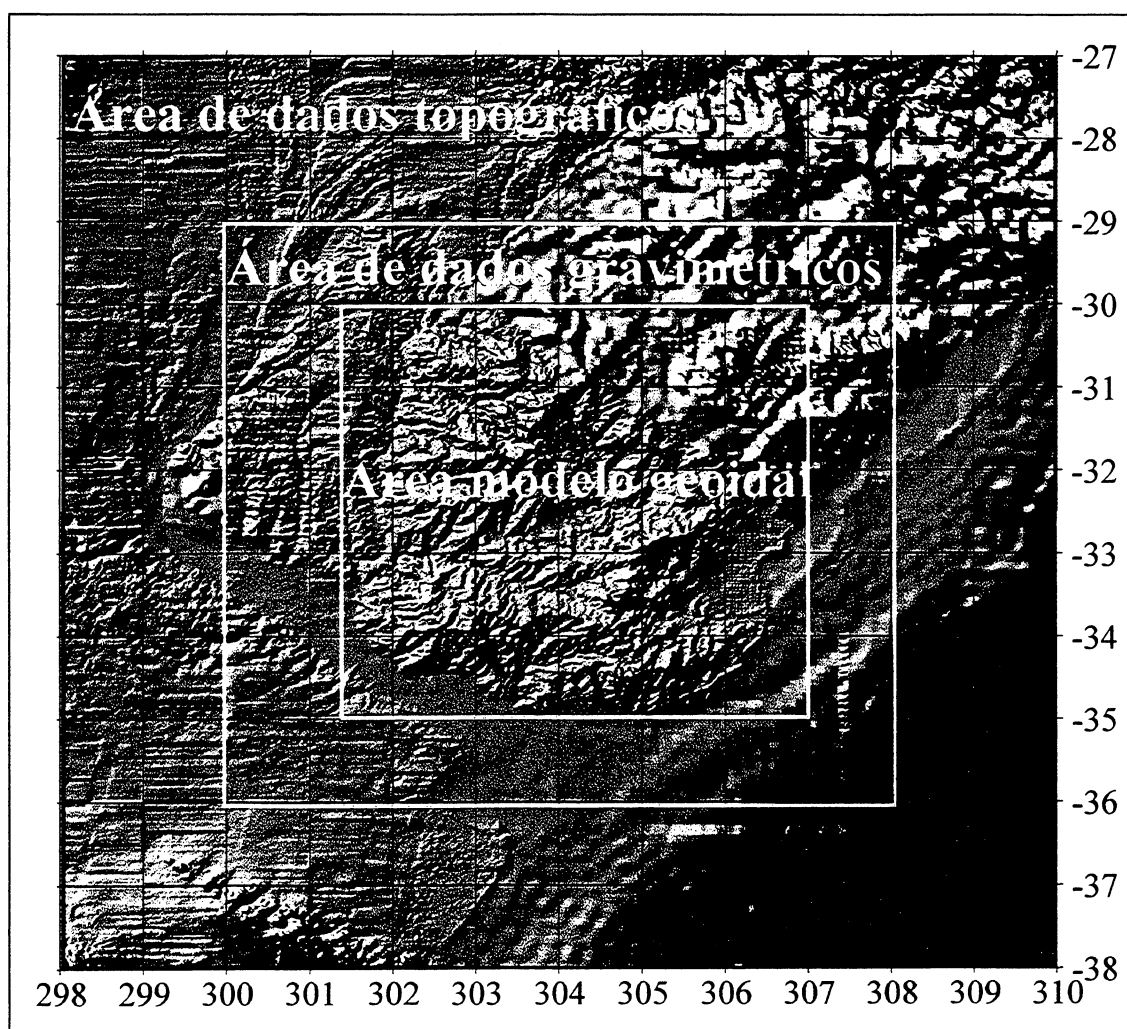


Figura 6. Distribuição geográfica dos dados para o cálculo do modelo geoidal no Uruguai.

3.1 RELAÇÃO DOS DADOS E RESPECTIVAS FONTES

DADOS USADOS NESTE TRABALHO
<p>3.1.1 Modelos geopotenciais</p> <p>3.1.1.1 EGM96 do NIMA, coeficientes do modelo e seus desvios padrão, completo até o grau de 360. Fornecido pela escola do Geóide em Setembro de 1997 e disponibilizado na página da Internet da instituição (NIMA, 1999):</p> <p>http://164.214.2.59/geospatial/products/GandG/WGS84/egm96.html.</p> <p>3.1.1.2 GPM98CR, do Dr. Georg Wenzel, coeficientes do modelo completo até o grau 720. Disponibilizado em 1998, na página da Internet http://www.ife.uni-hannover.de/~wenzel</p>
<p>3.1.2 Dados gravimétricos</p> <p>3.1.2.1 Locais (Uruguai)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Serviço Geográfico Militar, base de dados gravimétricos do Uruguai, contendo 2376 estações relativas, medidas com gravímetros LaCoste & Romberg e ajustadas com 4 estações absolutas JILAG-3 (SGM, 1973 e Subiza 1998b). <p>3.1.2.2 Regionais (Argentina, Brasil, Paraguai, Oceano Atlântico)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Institut für Erdmessung, IfE, Hanôver, Alemanha (Dr. Georg Wenzel), recebidas em 15 de Dezembro de 1998, 95066 estações gravimétricas terrestres e marinhas, da base de dados PFA3, compreendidas entre os paralelos -20° e -60° e os meridianos 270° e 330°. - Bureau Gravimétrico Internacional, recebidas em 8 de Junho de 1999, 10876 estações gravimétricas (6094 marinhas e 4782 terrestres) compreendidas entre os paralelos -27° e -38° e os meridianos -62° e -50°. - Subcomissão para a Gravidade e o Geóide para América do Sul, extraídas do servidor da USP em 7 de Junho de 1999, 15755 estações gravimétricas, compreendidas entre os paralelos -24° e -39° e os meridianos -45° e -62°. - Universidade de Cambridge, Inglaterra e Departamento de Engenharia Civil da Universidade Nacional Chão Tung (Dr. Chenway Hwang), Taiwan, China Nacionalista. Em 29 de junho de 1999, foi recebido o modelo global de anomalias ar-livre marinhas GMGA9706, desenvolvido pelas instituições mencionadas. O modelo foi obtido a partir de observações de altimetria de satélites, possuindo um espaçamento de dados de 2' x 2'. Disponível na página da Internet: http://gps.cv.nctu.edu.tw/research/paper/gmga/.

3.1.3 Dados do relevo topográfico

3.1.3.1 Locais (Marinhos e terrestres)

Serviço Geográfico Militar do Uruguai, base de dados de altitudes médias do Uruguai e batimetria do Rio da Prata, versão final 1.1 estabelecida em 12 de agosto de 1998. Total de dados: 69647, incluindo 68272 de altitudes terrestres médias em espaçamento de 2 x 2 km e 1375 dados batimétricos em espaçamento aproximado em 10 x 10 km.

3.1.3.2 Dados regionais

- **Instituto Astronômico e Geofísico**, Universidade de São Paulo (IAG-USP), arquivo com 41881 pontos altimétricos, entre os paralelos -26° e -38° e os meridianos -59° a -50°, com um espaçamento de altitudes de 2,5' x 2,5'. O arquivo é parte do MTD que está sendo elaborado para Brasil, e inclui dados oceânicos obtidos do modelo TBASE.

- **United States Geological Service**, recebidos em 06 de Junho de 1998 os arquivos do modelo global GTOPO30, **W060S10** e **W100S10**, compreendendo a área entre os paralelos -10° e -60° e os meridianos 260° e 340°, também disponível na Internet para transferencia via *ftp* em: *edcftp.cr.usgs.gov*, diretório: */pub/data/gtopo30/global*.

3.1.4 Dados de controle dos modelos geoidais

- Absolutos

Disponíveis um total de 51 observações GPS sobre RRNN, 29 na Argentina e 22 no Uruguai.

- Relativos

Dispõe-se, na região do Uruguai, de 23 diferenças de altitudes geométricas e ortométricas, entre estações GPS sobre RRNN.

3.2 CONSIDERAÇÕES ACERCA DOS DADOS

3.2.1 Modelos geopotenciais

Dispõe-se dos modelos EGM96, completo até o grau 360 (Lemoine *et al*, 1997) e do modelo GPM98CR (Wenzel, 1998), completo até o grau 720.

O EGM96 é um modelo do geopotencial, baseado no sistema geodésico WGS84 (G873), sendo compatível com as observações de controle GPS. Foi calculado a partir de anomalias ar-livre médias com espaçamento de 30' x 30', visando servir de base para modelagem de órbitas de satélite artificiais, como datum altimétrico global e estudos oceanográficos e

geofísicos. As anomalias de gravidade, usadas na determinação do modelo, foram corrigidas do efeito da atmosfera, adicionando o valor expresso por

$$\delta g_A = 0,87 e^{-0,116 H^{1,047}} \text{ mGal.} \quad (109)$$

Os modelos consistem em arquivos de formato tipo ascii, contendo: o grau, a ordem, os coeficientes do modelo e os respectivos desvios padrão. Como exemplo, apresenta-se parte do arquivo correspondente ao modelo EGM96, até o grau e a ordem 4.

2	0	-0.484165371736E-03	0.000000000000E+00	0.35610635E-10	0.00000000E+00
2	1	-0.186987635955E-09	0.119528012031E-08	0.10000000E-29	0.10000000E-29
2	2	0.243914352398E-05	-0.140016683654E-05	0.53739154E-10	0.54353269E-10
3	0	0.957254173792E-06	0.000000000000E+00	0.18094237E-10	0.00000000E+00
3	1	0.202998882184E-05	0.248513158716E-06	0.13965165E-09	0.13645882E-09
3	2	0.904627768605E-06	-0.619025944205E-06	0.10962329E-09	0.11182866E-09
3	3	0.721072657057E-06	0.141435626958E-05	0.95156281E-10	0.93285090E-10
4	0	0.539873863789E-06	0.000000000000E+00	0.10423678E-09	0.00000000E+00
4	1	-0.536321616971E-06	-0.473440265853E-06	0.85674404E-10	0.82408489E-10
4	2	0.350694105785E-06	0.662671572540E-06	0.16000186E-09	0.16390576E-09
4	3	0.990771803829E-06	-0.200928369177E-06	0.84657802E-10	0.82662506E-10
4	4	-0.188560802735E-06	0.308853169333E-06	0.87315359E-10	0.87852819E-10

O modelo GPM98CR, é um modelo desenvolvido até o grau e ordem 1.800 (mais de 3 milhões de coeficientes) e está baseado inicialmente, nos coeficientes do modelo EGM96 completo até o grau 180 (Wenzel, 1999), o que faz com que ele seja compatível com as observações GPS. O modelo foi calculado a partir de uma base de dados de anomalias gravimétricas de ar-livre, em quadrículas de 5'x 5' (resolução espacial de 10 km), sendo que apenas 2,66 % da Terra ficou sem a informação correspondente. Testes prévios, realizados com dados GPS do Uruguai, indicaram que o seu uso no cálculo das alturas geoidais, acarreta uma pequena melhoria nos resultados, comparado ao modelo geopotencial EGM96 completo até 360 graus (Subiza, 1999b, c).

3.2.2 Dados gravimétricos

A base de dados do Uruguai foi medida, calculada e ajustada pelo SGM no decorrer de mais de 20 anos. É uma base consistente, homogênea e de alta precisão. A homogeneidade e a consistência, estão garantidas por terem sido executadas de acordo com as normas de trabalho de uma só instituição, onde os dados sofreram um processo de avaliação e controle únicas, independente das etapas ou o tempo de execução. A realização dos levantamentos foi feita com apenas 3 instrumentos geodésicos de primeira ordem, sendo eles gravímetros LaCoste & Romberg, modelo G. Um ajuste simultâneo dos dados gravimétricos, sobre quatro estações gravimétricas absolutas de alta precisão (erro estimado inferior a 10 nGal), forneceu um desvio padrão médio de 26 nGal, com um máximo de 52 nGal (Subiza, 1998b).

A base de dados PFA3, fornecida pelo Dr. Georg Wenzel (IfE), é uma compilação das fontes de dados gravimétricos abertas, que incluem diversas instituições internacionais como o BGI ou projetos específicos. A totalidade dos dados da base PFA3, supera os 9 milhões, sendo que não se dispõe de informação, quanto à redução ou compatibilização dos dados, em relação ao sistema geodésico e ou gravimétrico.

O BGI, forneceu dois arquivos com dados gravimétricos, um contendo dados terrestres e o outro dados marinhos, mais dois arquivos, contendo a identificação e informações das fontes em cada caso. Os arquivos de dados incluem: N^o de identificação, coordenadas geográficas e altitude da estação, valor da gravidade observada, anomalias de ar-livre e Bouguer e indicadores de precisão dos valores fornecidos. As informações permitiram identificar erros de duplicidade nos dados recebidos, como será mostrado no Capítulo 4 porém, nos dados marinhos não foi possível identificar a altitude exata da observação gravimétrica, o que levou ao uso restrito deste tipo de dados, sendo substituído pelo modelo global de anomalia de ar-livre marinhas GMGA9706, descrito nesta seção.

Os dados gravimétricos da SCGSA, são dados fornecidos pelos diversos países sul-americanos e organizações internacionais, sendo compilados e reduzidos ao sistema gravimétrico IGSN71 com anomalias referidas ao sistema geodésico WGS84. Desta base de dados foi retirado um arquivo de dados gravimétricos contendo para cada estação: N^o de identificação, as coordenadas geográficas (WGS84), a altitude ortométrica e o valor da gravidade observada.

A última fonte de dados usada neste trabalho, é o modelo global das anomalias gravimétricas de ar-livre marinhas, GMGA9706, desenvolvido em conjunto pela Universidade de Cambridge (Inglaterra) e o Departamento de Engenharia Civil da Universidade Nacional Chão Tung, Taiwan (China Nacionalista) (Hwang *et al*, 1999). O modelo, compreendendo a região entre os paralelos 82°N a 82°S e os meridianos 0° a 360°, possui um espaçamento de dados de 2' x 2' e foi obtido a partir de observações altimétricas nas missões dos satélites Seasat, Geosat, ERS-1 e TOPEX/POSEIDON. No seu cálculo, foram derivadas as altitudes da superfície marinha, obtendo assim, os gradientes da superfície. Depois foram calculadas as componentes norte e leste do gradiente e colocadas na forma de reticulado. Com esta malha e através da fórmula inversa de Vening-Meinesz, via a 1DFFT, obteve-se as anomalias gravimétricas ar-livre.

3.2.3 Dados topográficos

Os dados que constituem o modelo topográfico do Uruguai, são 68.272, possuindo um erro estimado de aproximadamente ± 5 m. Estes dados foram obtidos de uma dupla leitura sobre cartas topográficas em escala 1/50.000, com quadriculas de espaçamento regular de 2 km. As coordenadas planas referidas ao sistema local ROUUSAMS, foram transformadas ao sistema WGS84 (Subiza, 1999b e c). A altitude média da topografia é de 71,7 m. Os dados batimétricos do Rio da Prata, são 1.375 e foram lidos em cartas no sistema geodésico WGS84, com espaçamento de 10' x 10'. A suavidade do leito marinho além dos 100 km da costa, garantem que a menor resolução da batimetria e os seus erros maiores, não terão grande influência nos cálculos gravimétricos

Para o restante do relevo topográfico, dispõe-se do modelo da topografia global GTOPO30 (USGS, 1999), o qual será descrito na sequência e do arquivo pertencente ao MTD do Brasil, descrito depois.

O modelo GTOPO30 é o resultado de um projeto executado pelo Serviço Geológico dos Estados Unidos entre 1993 e 1996, em conjunto com diversas organizações internacionais. É um MTD global da parte continental da Terra, com resolução espacial de 1 km x 1 km (30" x 30"), totalizando 21.600 linhas por 43.200 colunas. O sistema de referência usado para as coordenadas horizontais é o WGS84 (G730) e para as altitudes o nível médio dos mares¹³. As áreas oceânicas têm o valor de -9999, indicando a inexistência de dados altimétricos nesse modelo, enquanto que as linhas de costa têm o valor mínimo de 1m. Para facilitar o uso dos dados, esse modelo foi dividido em blocos de 50° de latitude por 40° de longitude (6.000 linhas por 4.800 colunas de dados), sendo o nome de cada um deles, as coordenadas do vértice noroeste de cada bloco. Para cada bloco há 8 arquivos com diferentes informações. De todos estes arquivos foi usado apenas o arquivo de dados altimétricos, estando em formato raster, binário de 16 bits e armazenado em colunas.

Na formação do modelo global, foram usadas 8 fontes de dados diferentes, mas a região de interesse deste trabalho, contém apenas duas, que são

- **Base de dados topográficos do NIMA (Digital Terrain Elevation Data - DTED).**

É uma base de dados topográfica em formato raster, com espaçamento de 3" (aproximadamente 90 m), produzida a partir de cartas em escalas médias (1/50.000 e

¹³ Definição não esclarecida na documentação disponível do modelo. Por ser um modelo baseado em cartas geográficas e topográficas, supõe-se que os dados de cada país estão baseados no seu próprio datum vertical local e não num datum vertical global. Os erros de geração do próprio modelo, são superiores a este suposto erro.

menores). A raiz do erro médio quadrático (RMS- "Root Mean Square") estimado para a altitude, é de 18 m. Estas informações contribuíram com 50 % aos dados do modelo global;

- **Mapa Mundial Digital (Digital Chart of the World - DCW).** É um conjunto de dados cartográficos em formato vetorial, baseado em cartas escala 1/1.000.000. A raiz do erro médio quadrático estimado para uma altitude, é de 97 m. Estas informações contribuíram com 29,9 % aos dados do modelo global.

Os arquivos correspondentes à área escolhida para gerar o MTD deste trabalho, são o **W100S10** e o **W060S10**. Destes arquivos, foram extraídas dados a cada 1', em toda a área definida pelos paralelos -27° e -38° e meridianos 298° e 310°, totalizando 476.851 pontos, com altitudes entre 1 m y 1.547 m. O espaçamento escolhido, implica que se têm aproximadamente um ponto cada 1.850 m em latitude e 1.550 m em longitude. Os recursos computacionais, limitaram a densidade da malha criada para considerar os efeitos de relevo (principalmente o efeito indireto). A Figura 7 mostra os dados obtidos do modelo, destacando-se visualmente as diferenças nas fontes de dados usadas.

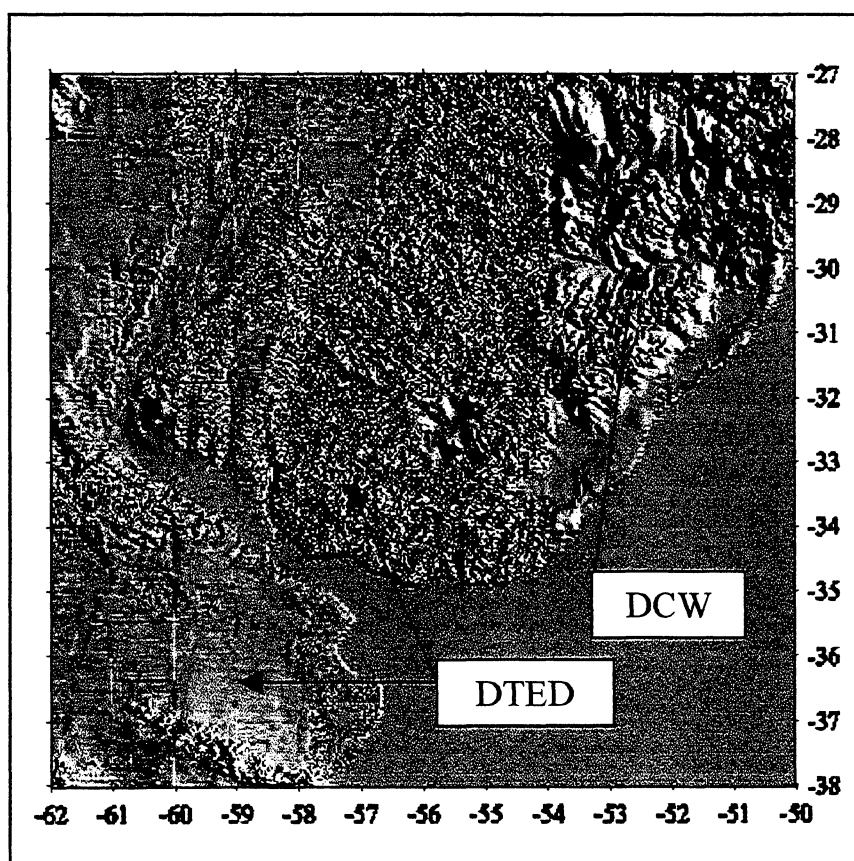


Figura 7. Relevo topográfico a partir do MTD GTOPO30, resolução 30"x 30".

Os dados topográficos do Uruguai e do Brasil, foram posteriormente retirados do arquivo gerado a partir do modelo GTOPO30, para serem substituídos pelos dados correspondentes, fornecidos pelo SGM e o IAG-USP, como será visto no Capítulo 4, que descreve a metodologia.

3.2.4 Dados de controle dos modelos geoidais

O SGM, forneceu 22 observações GPS absolutas e 23 relativas, estabelecidas sobre a rede de Triangulação do Uruguai. Estas estações, possuem altitude ortométrica referida ao datum vertical do país, medida em diferentes épocas e por diferentes métodos de nivelamento, sendo a sua precisão variável entre alguns cm e alguns decímetros (SGM, 1999). As Tabelas 1 e 1a., apresentam os dados do Uruguai, a Tabela 2 mostra os correspondentes na Argentina.

Tabela 1. Dados de controle absolutos GPS/RNs, no Uruguai.

No.	Estação	Latitude WGS84	Longitude O WGS84	Longitude E WGS84	h	H	N (h - H)
2	ETCHEGARAY	-31,00078796	-55,75255519	304,24744481	395,400	380,340	15,060
4	CERRO VIGIA	-33,71060474	-53,58078372	306,41921628	165,692	152,700	12,992
6	BELLA VISTA	-32,66016930	-56,27525067	303,72474933	150,264	133,890	16,374
7	FORTALEZA	-34,88827991	-56,25977386	303,74022614	149,738	134,820	14,918
9	SERRA	-33,18265702	-57,25668198	302,74331802	114,891	97,470	17,421
10	PUNTAS DEL YI	-33,13769883	-55,20751327	304,79248673	266,522	251,090	15,432
12	I - T.O. AGRACIADA	-33,80977126	-58,39514277	301,60485723	62,954	46,430	16,524
13	MONTEVIDEO	-34,88831968	-56,25988210	303,74011790	158,083	143,150	14,933
14	ARTILLEROS	-34,33365457	-57,57008125	302,42991875	97,810	81,630	16,180
15	MAST.HITO U5	-33,91592091	-58,41404728	301,58595272	42,781	26,513	16,268
16	II RIACHUELO	-34,41756585	-57,66666176	302,33333824	63,181	47,160	16,021
17	II LAG. PATOS	-34,44450320	-57,76486310	302,23513690	57,894	42,180	15,714
18	I - CANGUE	-32,38449038	-58,02870096	301,97129904	72,059	54,790	17,269
20	II - LA CABALLADA	-34,36051569	-57,82725343	302,17274657	79,407	63,770	15,637
21	III - 0220	-34,46367413	-57,84241519	302,15758481	70,384	54,300	16,084
22	IV - 10839	-34,30545910	-56,70236128	303,29763872	66,048	50,300	15,748
23	CIUDAD COSTA A	-34,87659146	-56,04406504	303,95593496	20,972	6,420	14,552
24	CIUDAD COSTA B	-34,84641090	-56,00881461	303,99118539	23,662	9,120	14,542
25	CIUDAD COSTA C	-34,82322851	-55,96010401	304,03989599	27,007	12,784	14,223
26	CIUDAD COSTA D	-34,80196182	-55,92255908	304,07744092	36,640	21,970	14,670
27	I - MANGA	-34,79307211	-56,07078586	303,92921414	48,140	33,310	14,830
28	SGM	-34,88050358	-56,15057055	303,84942945	89,020	74,170	14,850

Tabela 1a. Dados de controle relativos GPS/RNs, no Uruguai.

No.	De	Para	Dist. (km)	Delta h	Delta H	N _{GPS}
1	ETCHEGARAY	BELLA VISTA	190,536	245,14	246,45	-1,31
2	BELLA VISTA	FORTALEZA	247,132	0,53	-0,93	1,46
3	ETCHEGARAY	SERRA	280,509	280,51	282,87	-2,36
4	SERRA	BELLA VISTA	108,557	-35,37	-36,42	1,05
5	ETCHEGARAY	PUNTAS DEL YI	242,478	128,88	129,25	-0,37
6	BELLA VISTA	I - T.O. AGRACIADA	235,146	87,31	87,46	-0,15
7	MONTEVIDEO	SGM	10	69,06	68,98	0,08
8	MONTEVIDEO	I - T.O. AGRACIADA	229,981	95,129	96,72	-1,59
9	MONTEVIDEO	ARTILLEROS	135,004	60,273	61,52	-1,25
10	II RIACHUELO	ARTILLEROS	140,505	-34,629	-34,47	-0,16
11	II LAG. PATOS	MONTEVIDEO	146,462	-100,189	-100,97	0,78
12	I - CANGUE	I - T.O. AGRACIADA	161,76	9,105	8,36	0,74
13	I - CANGUE	BELLA VISTA	167,551	-78,205	-79,1	0,89
14	CIUDAD COSTA A	CIUDAD COSTA B	4,647	-2,69	-2,7	0,01
15	I - MANGA	SGM	12,139	-40,88	-40,86	-0,02
16	SGM	CERRO VIGIA	204,679	-76,6716	-78,53	1,86
17	CERRO VIGIA	PUNTAS DEL YI	164,092	-100,8304	-98,39	-2,44
18	CERRO VIGIA	BELLA VISTA	276,943	15,4276	18,81	-3,38
19	CERRO VIGIA	ETCHEGARAY	363,38	-229,7086	-227,64	-2,07
20	CERRO VIGIA	I - T.O. AGRACIADA	458,504	102,7376	106,27	-3,53
21	CERRO VIGIA	I - CANGUE	423,757	93,6326	97,91	-4,28
22	MONTEVIDEO	ETCHEGARAY	433,675	-237,3172	-237,19	-0,13
24	TOPADOR	ALMEIDA	37,156	68,35	68,59	-0,24

Tabela 2. Dados de controle GPS/RNs, na Argentina.

No.	Latitude WGS84	Longitude O WGS84	N (h - H)
1	-33,9100	-59,4551	17,24
2	-34,0540	-59,3104	17,11
3	-34,0933	-59,1713	17,03
4	-34,2253	-59,4531	17,06
5	-34,2663	-59,4546	17,05
6	-34,4031	-59,8552	17,26
7	-34,4189	-59,7723	17,20
8	-34,5999	-59,1511	16,54
9	-34,6081	-59,1727	16,56
10	-34,6526	-59,3373	16,74
11	-35,0098	-59,7093	16,70
12	-35,0676	-59,6103	15,87
13	-35,0702	-59,1316	16,21
14	-35,1025	-59,4789	15,78
15	-35,1680	-59,1770	17,13
16	-35,1810	-59,1246	17,19
17	-35,2512	-59,5097	17,32
18	-35,3023	-59,5921	16,87
19	-35,3232	-59,6163	16,93
20	-35,4027	-59,0501	16,31
21	-35,4963	-59,0292	16,45
22	-35,5111	-59,1933	17,79
23	-35,5295	-59,3128	15,78
24	-35,5500	-59,3783	15,80
25	-35,6035	-59,7533	17,48
26	-35,6415	-59,8229	17,38
27	-35,8735	-59,5795	17,45
28	-35,8853	-59,6178	17,42
29	-35,9899	-59,1150	17,21

Os dados de controle da Argentina, foram extraídos da publicação (Perdomo e Del Cogliano, 1999), sendo realizadas as observações GPS sobre a rede de nivelamento geométrico de 1ª ordem, vinculada ao Datum vertical Mar del Plata.

Finalmente a Figura 8, mostra a distribuição geográfica de todos os dados de controle disponíveis. Note-se a ausência de dados na zona noroeste (Argentina) e na zona norte e leste (Brasil).

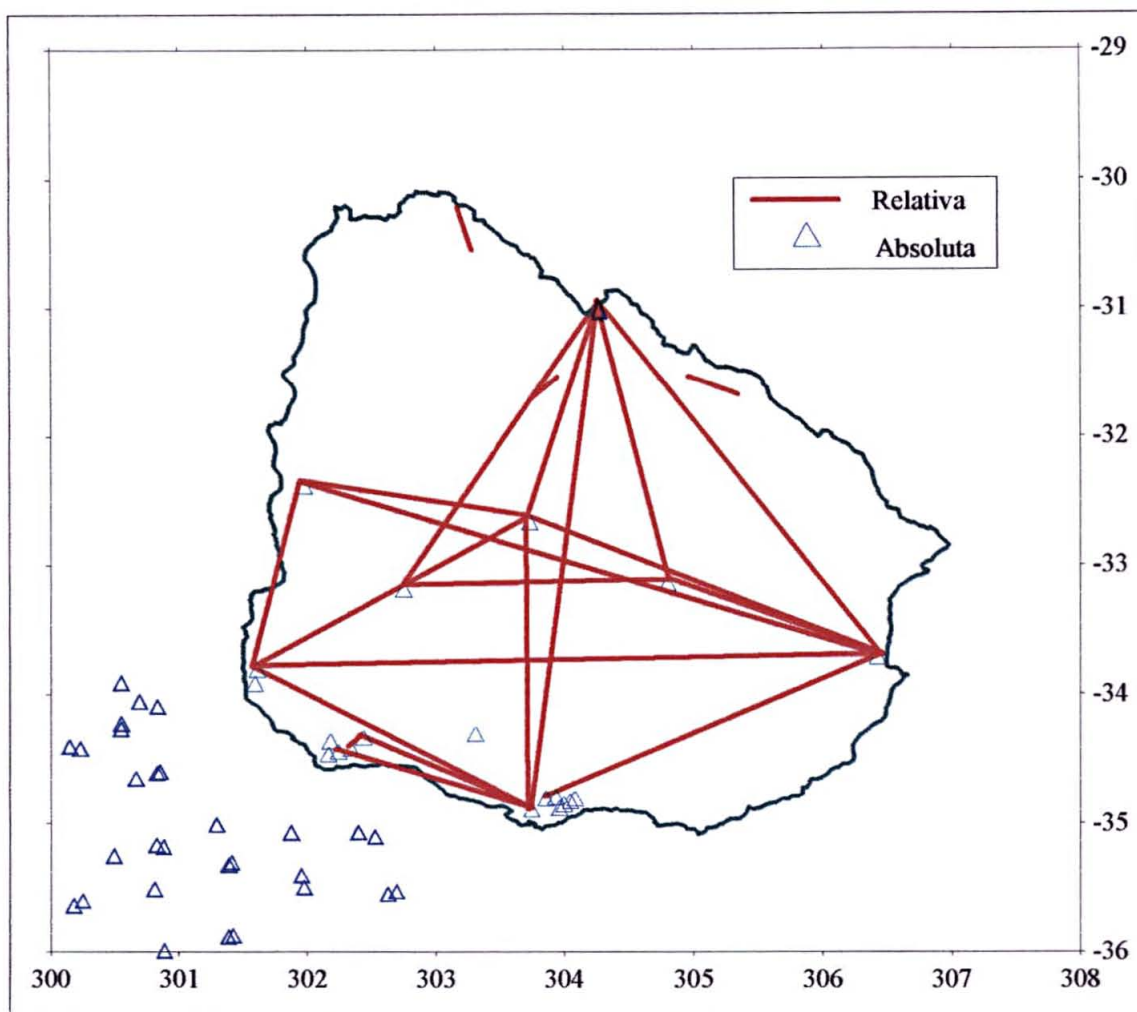


Figura 8. Distribuição dos dados de controle GPS, absolutos e relativos.

3.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os dados descritos apresentando uma série de diferenças em relação a sistemas de referência, assim como a metodologia empregada, impõem que algumas aproximações sejam feitas.

Os **dados de gravimetria**, estão referidos a diferentes sistemas gravimétricos, a saber: os do Uruguai, baseados num ajustamento local sobre quatro estações absolutas e o resto dos dados gravimétricos terrestres, referidos ao sistema IGSN71. A diferença em pontos específicos da rede uruguaia com a brasileira e a argentina, atinge valores de 0,05 a 0,10 mGal respectivamente (Subiza, 1998b).

De forma semelhante os **dados topográficos**, estão referidos a diferentes sistemas altimétricos, por exemplo, os dados do Brasil referem-se a Datum Imbituba, os do Uruguai ao Datum Montevideu e os dados do GTOPO30 ao datum nível médio dos mares. A determinação do modelo GTOPO30, na área da Argentina, foi feita a partir de cartas topográficas em escala média, o que faz suspeitar de estar referido ao datum argentino Mar del Plata. A diferença entre os sistemas de referência verticais, está pendente ainda de futuras pesquisas, como as planejadas pelo projeto SIRGAS.

Com respeito ao **modelo geopotencial**, a determinação do geóide pela técnica de decomposição da altura geoidal, causa um erro sistemático na componente altimétrica ou seja, entre as alturas geoidais calculadas e as alturas geoidais observadas com o posicionamento por GPS. Isto acontece, porque os coeficientes de baixo grau e ordem do modelo geopotencial contém erros sistemáticos, fruto da própria metodologia do seu cálculo (normalmente referidos a um elipsóide global médio e não a um específico), mas também devido ao uso da correção atmosférica em áreas restritas e por causa dos erros introduzidos pelas definições locais dos data verticais regionais.

As alturas geoidais geradas com o uso do modelo WGS84, através dos programas específicos fornecidos pelo NIMA (1999), são reduzidas de um elipsóide médio ao elipsóide WGS84, por meio da correção -0,53 m, e finalmente referidas a um geóide livre dos efeitos das marés (Lemoine *et al*, 1998). Isto contraria a recomendação contida na resolução 16 da Assembléia Geral da IAG de 1983, na qual "o geóide apropriado para ser usado é o geóide zero com as correspondentes ondulações geoidais zero". A diferença entre altitudes nos sistemas *livre de marés*, *zero* e *médio*, atinge valores globais da ordem de 10 cm. Na área do Uruguai essa diferença (que depende da latitude do ponto considerado), não atinge valores superiores a 3 cm, sendo inferior ao próprio valor do ruído observacional (Subiza, 1999d).

Neste trabalho, a redução das alturas geoidais ao elipsóide WGS84, não será efetuada nos cálculos iniciais, o que adiciona um erro sistemático, que se soma aos erros introduzidos pelas diferenças nos sistemas gravimétricos e altimétricos.

A eliminação destas fontes de erro, depende do conhecimento acurado das diferenças entre estes sistemas, sendo que essa informação ainda não está disponível. Sendo assim, as alturas geoidais calculadas deverão ser corrigidas do erro sistemático na etapa de avaliação (Capítulo 6), para levar em consideração este erros mencionados.

Para efeitos práticos, o sistema de marés a ser adotado é o geóide livre de marés, porém, a transformação entre sistemas é de fácil execução (Subiza, 1999d).

3.4 CONSTANTES USADAS NESTE TRABALHO

3.4.1 Constantes gerais e convenções

Unidade de medida de comprimento,	metro, m;
Unidade de medida do tempo,	segundo, s;
Unidade de massa,	o quilograma, kg;
Unidade do ângulo plano,	o radiano ¹⁴ , rad (1 rad = 57° 17' 44,8''); grau (1° = $\pi / 180$ rad), minuto (1' = $\pi / 10.800$ rad) e segundo (1'' = $\pi / 648.800$ rad); miligal, mGal (1 mGal = 10^{-5} m s ⁻²); $G = 6,672 \times 10^{-11}$ m ³ s ⁻² kg ⁻¹ ; $\rho = 2670$ kg m ⁻³ ; $\rho_A = 1027$ kg m ⁻³ .
sendo usadas nas coordenadas geográficas as unidades sexagesimais(unidades aceitas no SI),	
Unidade de medida da aceleração,	
Constante universal da gravitação,	
Densidade média da crosta terrestre,	
Densidade média da água salgada,	

3.4.2 Sistema geodésico WGS84 (G873)

Constantes fundamentais:

Semi-eixo maior do elipsóide,	$a = 6\,378\,137.0$ m;
Inverso do achatamento do elipsóide,	$1/f = 298.257\,223\,563$;
Constante gravitacional geocêntrica ¹⁵ ,	$GM = 3\,986\,004,418 \times 10^8$ m ³ s ⁻² ;
Velocidade de rotação da Terra,	$\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11}$ rad / s.

Constantes geométricas derivadas:

Primeira excentricidade do elipsóide,	$e = 8,181\,919\,084\,2622 \times 10^{-2}$;
Semi-eixo menor do elipsóide,	$b = 6\,356\,752,3142$ m;
Raio de uma esfera de igual superfície à Terra,	$R_2 = 6\,371\,007,1809$ m;
Raio de uma esfera de igual volume à Terra,	$R_3 = 6\,371\,000,7900$ m.

Constantes físicas derivadas:

Constante gravitacional geocêntrica da atmosfera,	$GM_A = 3,5 \times 10^8$ m ³ s ⁻² ;
---	---

¹⁴ Ângulo central correspondente ao arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.

¹⁵ Atmosfera incluída.

Potencial do esferóide WGS84,	$U_0 = 62\,636\,860,8497 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2};$
Gravidade normal, no equador do elipsóide,	$\gamma_E = 978\,032,533\,59 \text{ mGal};$
Gravidade normal, nos pólos do elipsóide,	$\gamma_P = 983\,218,493\,78 \text{ mGal};$
Gravidade média do elipsóide,	$\bar{\gamma} = 979\,764,322\,22 \text{ mGal};$
Constante κ da fórmula de Somigliana,	$\kappa = 0,001\,931\,852\,652\,41.$

Coeficientes plenamente normalizados do elipsóide WGS84

$\bar{C}_{(2,0)}$	$-0,484\,166\,774\,985 \times 10^{-3};$
$\bar{C}_{(4,0)}$	$0,790\,303\,733\,511 \times 10^{-6};$
$\bar{C}_{(6,0)}$	$-0,168\,724\,961\,151 \times 10^{-8};$
$\bar{C}_{(8,0)}$	$0,356\,042\,468\,394 \times 10^{-11};$
$\bar{C}_{(10,0)}$	$-0,265\,002\,225\,747 \times 10^{-14}.$

CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA

Este capítulo descreve em linhas gerais (seções 4.1 a 4.3) e em detalhe (seção 4.4), a metodologia usada no cálculo e na avaliação dos modelos geoidais obtidos.

4.1 ETAPAS PRÉVIAS

As seguintes etapas prévias ao cálculo dos modelos geoidais, foram desenvolvidas:

- Estabelecer um arquivo de dados de gravimetria terrestre e marinha, a partir da integração e avaliação das informações de gravidade, disponíveis em diferentes fontes de dados;
- Formar um arquivo de dados topográficos, incluindo áreas terrestres e marinhas vizinhas à área de cálculo do modelo geoidal;
- Calcular o efeito direto do terreno, sendo este valor adicionado posteriormente à base de dados gravimétricos do Uruguai (BDGU);
- Estabelecer as malhas, locais e regionais, contendo informações gravimétricas e topográficas, necessárias para o cálculo das correspondentes contribuições na altura geoidal.

4.2 CÁLCULO DOS MODELOS GEOIDAIIS

Inicialmente, foram calculados três modelos geoidais; o primeiro usando o modelo geopotencial EGM96 até o grau e a ordem de 180; o segundo com o mesmo modelo até o grau e a ordem de 360; e finalmente, o terceiro modelo geoidal com o modelo geopotencial GPM98CR, até o grau e a ordem de 540.

Mais quatro modelos geoidais de teste foram gerados; dois baseados no modelo EGM96 e dois no modelo GPM98CR. Os testes, avaliaram o uso de diferentes núcleos da fórmula de Stokes, a resolução espacial, assim como o uso da anomalia ar-livre calculada a partir da anomalia Bouguer e a consideração do efeito indireto de terreno na gravidade (expressão 46 do Capítulo 2).

A Tabela 3, resume as principais características dos modelos geoidais gerados e mostra as diferenças entre eles.

Tabela 3. Resumo das principais características de cada modelo geoidal calculado.

Modelo → Característica ↓	1 (EGM180)	2 (EGM360)	3 (EGM360b)	4 (GPM540)	5 (GPM540b)	6 (GPM540c)	7 (Final)
Mod. geopot. e grau usado	EGM96 180	EGM96 360	EGM96 360	GPM98CR 540	GPM98CR 540	GPM98CR 540	EGM96 120
Tipo de anomalia ar-livre usada	A partir da BDG	A partir da BDG	A partir da BDG	A partir da BDG	A partir da Bouguer	A partir da Bouguer	A partir Bouguer
Resolução espacial	5'	5'	10'	5'	5'	5'	10'
Efeito indireto na gravidade	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	SIM

A técnica principal do cálculo, foi a decomposição espectral da altura geoidal, denominada na literatura de “remove-restore” (Sideris, 1997) e apresentada no Capítulo 2, seção 8. A premissa da inexistência de massas externas ao geóide, foi contemplada com o segundo método de condensação de Helmert, levando em consideração o correspondente efeito indireto nas anomalias e a correção atmosférica aos valores de gravidade observada, conforme recomendação da IAG (Moritz, 1992). Especificamente, as alturas geoidais de cada modelo, foram calculadas mediante a sua separação espectral em três componentes: de longo, médio e pequeno comprimento de onda, como segue:

- as componentes de longo e médio comprimento de onda, foram obtidas a partir dos coeficientes dos modelos geopotenciais EGM96 ou GPM98CR, como descreve a Tabela 3;
- a componente de médio comprimento de onda, foi complementada através da fórmula de Stokes na forma de convolução, operando sobre um reticulado da anomalia gravimétrica residual. A fórmula de Stokes, foi calculada com o núcleo esférico rigoroso, via 1DFFT;
- a componente de pequeno comprimento de onda, foi fornecida pela topografia, através dos efeitos direto (calculada por integração numérica dos efeitos, com representação prismática da topografia) e indireto (avaliada com a FFT sobre uma malha de altitudes médias).

4.3 AVALIAÇÃO E SELEÇÃO DE MODELOS GEOIDAIIS OBTIDOS

Para avaliação dos modelos gerados, usaram-se os dados de teste, apresentados no Capítulo 3, selecionando-se aquele modelo que apresentou melhores resultados estatísticos gerais. A diferença principal entre os dados de controle, é que as observações GPS da Argentina, estão realizadas exclusivamente sobre RNs da rede de primeira ordem de nivelamento, enquanto no Uruguai as observações são em pontos planimétricos, cuja altitude ortométrica é de qualidade inferior. Carece-se de observações de controle no Brasil e no Paraguai, assim como observações de carácter relativo fora do Uruguai.

Os modelos de testes adicionais, permitiram quantificar alguns dos erros cometidos com as diversas aproximações usadas neste trabalho.

4.4 PROCEDIMENTO DETALHADO DE CÁLCULO

As seguintes Figuras, apresentam a formação dos arquivos de dados, o processamento e a avaliação feita nos modelos geoidais obtidos.

As Figuras 9, 10 e 13, correspondem à seleção, depuração, processamento e combinação dos dados gravimétricos das diferentes fontes, para se obter o arquivo de anomalias gravimétricas de ar-livre.

Na Figura 16, é mostrado a formação do MTD.

As Figuras 19, 20, 21 e 22, mostram o cálculo dos modelos geoidais 1 e 2, baseados no modelo geopotencial EGM96, detalhando em cada um deles os diversos passos desenvolvidos.

O cálculo do modelo geoidal 4, baseado no modelo geopotencial GPM98CR, é apresentado na Figura 23, e resume o processo global de cálculo que foi detalhado nas Figuras 19 a 22.

Finalmente na Figura 24 é apresentada a avaliação dos modelos, usando os dados GPS sobre RNs, objeto do capítulo 6. Os detalhes de cada Figura, são apresentados na seqüência.

4.4.1 Gravimetria

A Figura 9, mostra as cinco fontes disponíveis para formação do arquivo de anomalias gravimétricas de ar-livre incluindo a quantidade de registros e a área geográfica de distribuição de cada uma.

Na parte superior direita, acham-se os dados, extraídos da Base de Dados Gravimétricos do Uruguai (BDGU) e fornecidos pelo SGM. Devido á sua qualidade e distribuição geográfica, estes dados gravimétricos passaram diretamente à fase de combinação.

Na parte central superior da Figura mencionada, acham-se os dados fornecidos pela SCGGSA, pela Universidade de Hanôver (base de dados PFA3) e pelo BGI. As três fontes foram independentemente, submetidas a um processo de seleção de registros em função da área de interesse, definida inicialmente entre os paralelos -27° a -38° e os meridianos 298° a 310° (cerca de 3° maior do que a área prevista para o modelo geoidal).

Os programas para efetuar a seleção foram o *select* e o *Surfer* versão 7. Estes dados foram depurados, eliminando aqueles duplicados e com erros grosseiros, e também foram corrigidos alguns que se referiam ao valor antigo de gravidade de Postdam (13,95 mGal maior que o atual valor).

Na parte superior esquerda, encontra-se o modelo da anomalia gravimétrica ar-livre marinha, GMGA9706. Deste modelo foram extraídos 9.987 registros, localizados entre os paralelos $-32,3^{\circ}$ e -36° e os meridianos 302° e 308° . Estes dados passaram posteriormente à fase de combinação, com os dados de anomalias ar-livre da BDG.

As estatísticas deste processo inicial, são detalhados na Tabela 4

Tabela 4. Seleção inicial de dados gravimétricos.

Fonte	Total registros	Selecionados	Repetidos	Eliminados	Corrigidos a Postdam
SCGGSA	15.755	6.944	248	409	-
BGI (terra.)	4.786	4.046	-	-	-
BGI (mar.)	6.094	4.928	19	4.840	-
PFA3	95.066	4.050	-	-	37
Total	121.701	19.968	267	5.249	37

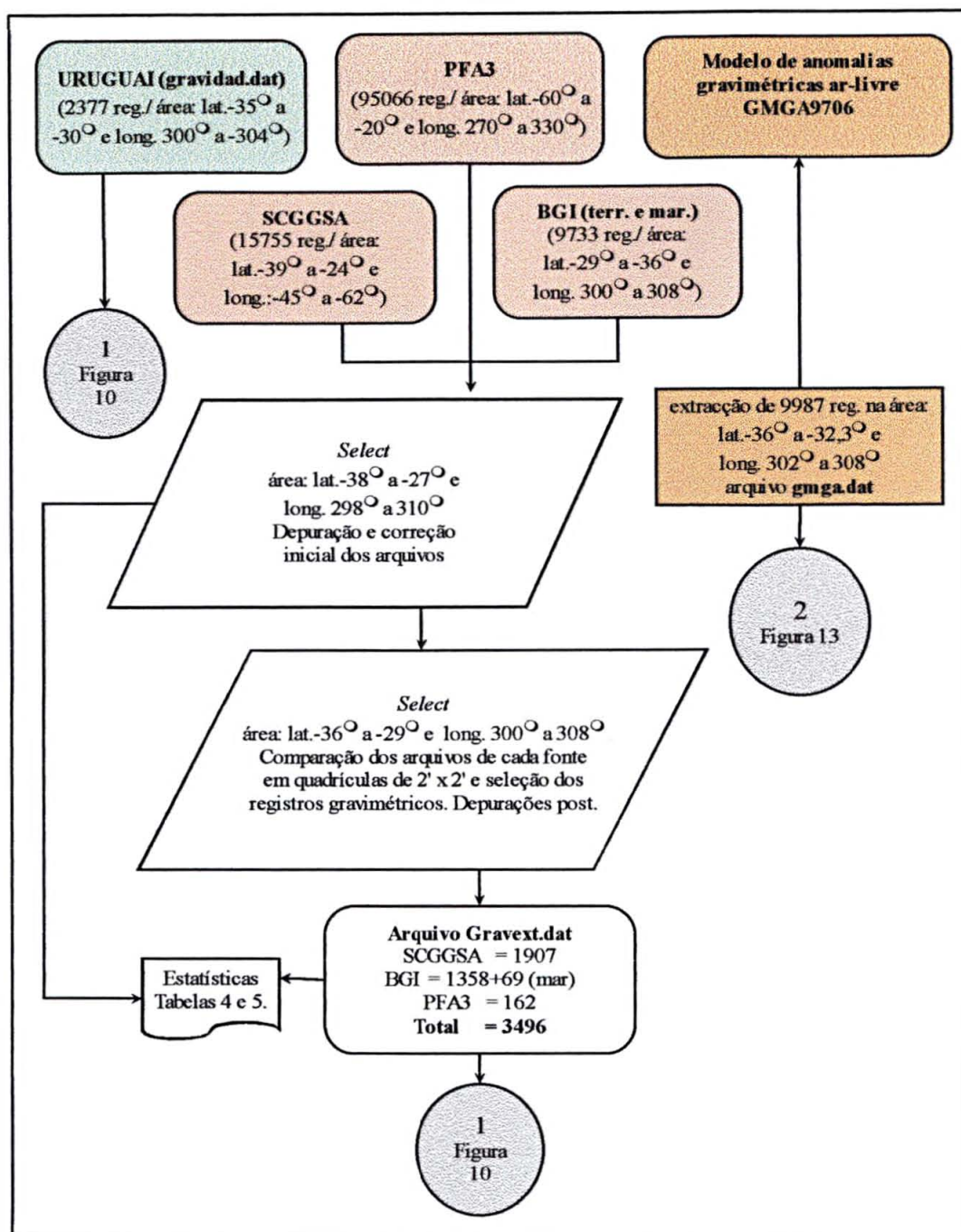


Figura 9. Formação do arquivo de anomalias gravimétricas. Primeira parte.

Para a seleção final (centro da Figura 9), foi reduzida a área de interesse, com o seguinte enquadramento: paralelos -29° a -36° e meridianos 300° a 308° em longitudes. Esta redução foi feita com base nos últimos trabalhos de modelos geoidais calculados com metodologia semelhante (Duquene e Jiang, 1997, por exemplo) e recomendações recebidas (Wenzel e Denker, 1999; Sideris, 1999b). A área foi dividida em 14 quadriculas de aproximadamente 2°

x 2º, comparando-se em cada uma delas, as três fontes de dados. Nesta comparação as fontes foram hierarquizadas para a seleção da seguinte forma:

- 1) Os dados gravimétricos da SCGGSA seriam considerados em primeiro lugar, por serem fornecidos pelos próprios países em época recente e por pertencer a projetos geodésicos, atualmente em execução;
- 2) Dados gravimétricos do BGI em segundo lugar, naquelas estações que complementam os dados da SCGGSA e não são dados repetidos em ambas bases;
- 3) Dados gravimétricos da base PFA3, naquelas estações não coincidentes com as duas fontes anteriores.

Na Tabela 5, detalham-se os dados numéricos da seleção feita.

Tabela 5. Comparação e seleção dos dados gravimétricos em cada uma das 14 quadriculas analisadas (*, indica estações em que os valores foram reduzidos ao valor atual de Postdam).

Fonte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Total
SCGGSA	227	101	124	410	224	1	31	145	327	12	1	14	214	76	1.907
BGI	202	22	-	-	358	17	7	12	406	28	3	-	256	47	1.358
PFA3	3*	7	3	-	32*	4	3	11	2*	7	-	110	-	98	280
Total	432	130	127	410	614	22	41	168	735	47	4	124	470	221	3.545

Na seleção final, foram eliminados os dados marinhos do BGI, por apresentarem insuficiência de informação com respeito à altitude na estação gravimétrica¹⁶, ficando apenas 69 estações que pertencem à Universidade de Buenos Aires as quais, tem-se a certeza de terem sido medidas no fundo do Rio da Prata com gravímetro submerso (Baglietto & Cerrato, 1965). Também foram eliminados os dados marinhos da base PFA3, por apresentarem todos uma altitude de 0 m e carecer-se de informação do procedimento feito para a sua obtenção ou redução.

Dos dados finais escolhidos nestas bases gravimétricas, 3.496 passaram a uma segunda fase de combinação e processamento com os dados gravimétricos do Uruguai, a qual é apresentada na figura 10, a fim de formar o arquivo de anomalias ar-livre necessário para a execução deste trabalho.

¹⁶ Consultado em forma reiterada o BGI, não obteve-se resposta satisfatória.

Na parte superior do Figura 10 está a combinação dos dados do passo anterior com os 2.377 dados do Uruguai, gerando um total de 5.873 dados gravimétricos. Na seqüência, estes dados são processados para:

- Determinar a correção atmosférica em cada estação, adotando a fórmula recomendada pela IAG (Moritz, 1992), desenvolvida por N. Pavlis e fornecida em (Sevilla, 1997, expressão 41 do Capítulo 2):

$$\delta g_A = 0,8658 - 9,727 \times 10^{-5} H + 3,482 \times 10^{-9} H^2 \text{ mGal};$$

- calcular a gravidade teórica, no sistema geodésico WGS84 (G873), seguindo a formulação fornecida pelo NIMA (1998, expressão 12 do Capítulo 2):

$$\gamma = \gamma_E \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

sendo γ_E a gravidade normal no equador do elipsóide, $k = \frac{b \gamma_P}{a \gamma_E} - 1$, a , b , são os semi-eixos do elipsóide adotado e γ_P é a gravidade nos pólos do elipsóide;

- calcular as anomalias gravimétricas ar-livre e Bouguer, para cada estação terrestre e marinha em forma separada, acorde fórmulas do BGI (1997, expressões 42 e 43 do Capítulo 2 para as anomalias terrestres):

Gravidade terrestre:

$$\text{Anomalia de ar-livre} \quad \Delta g_{AL} = g_P + 0,3086H - \gamma_0$$

$$\text{Bouguer} \quad \Delta g_B = \Delta g_{AL} - 2\pi G\rho H + B + C;$$

Gravidade marinha (gravímetro no leito do mar, a $-H$ m de profundidade)

$$\text{Anomalia ar-livre} \quad \Delta g_{AL} = g_P - (4\pi G\rho_A - 0,3086)H - \gamma_0 \quad (114)$$

$$\text{Bouguer} \quad \Delta g_B = \Delta g_{AL} + 2\pi G(\rho - \rho_A)H \quad (115)$$

- gerar as estatísticas de cada variável calculada, em termos de média do conjunto, máximo, mínimo e desvio padrão, usando uma distribuição gaussiana dos dados;
- gravar os registros na BDG, com a seguinte informação: N^o, Latitude, Longitude Leste, Longitude Oeste, altitude, gravidade observada, gravidade teórica, anomalia ar-livre, anomalia Bouguer padrão e correção de terreno (quando disponível). Os dados gravimétricos marinhos, identificam-se pela altitude negativa.

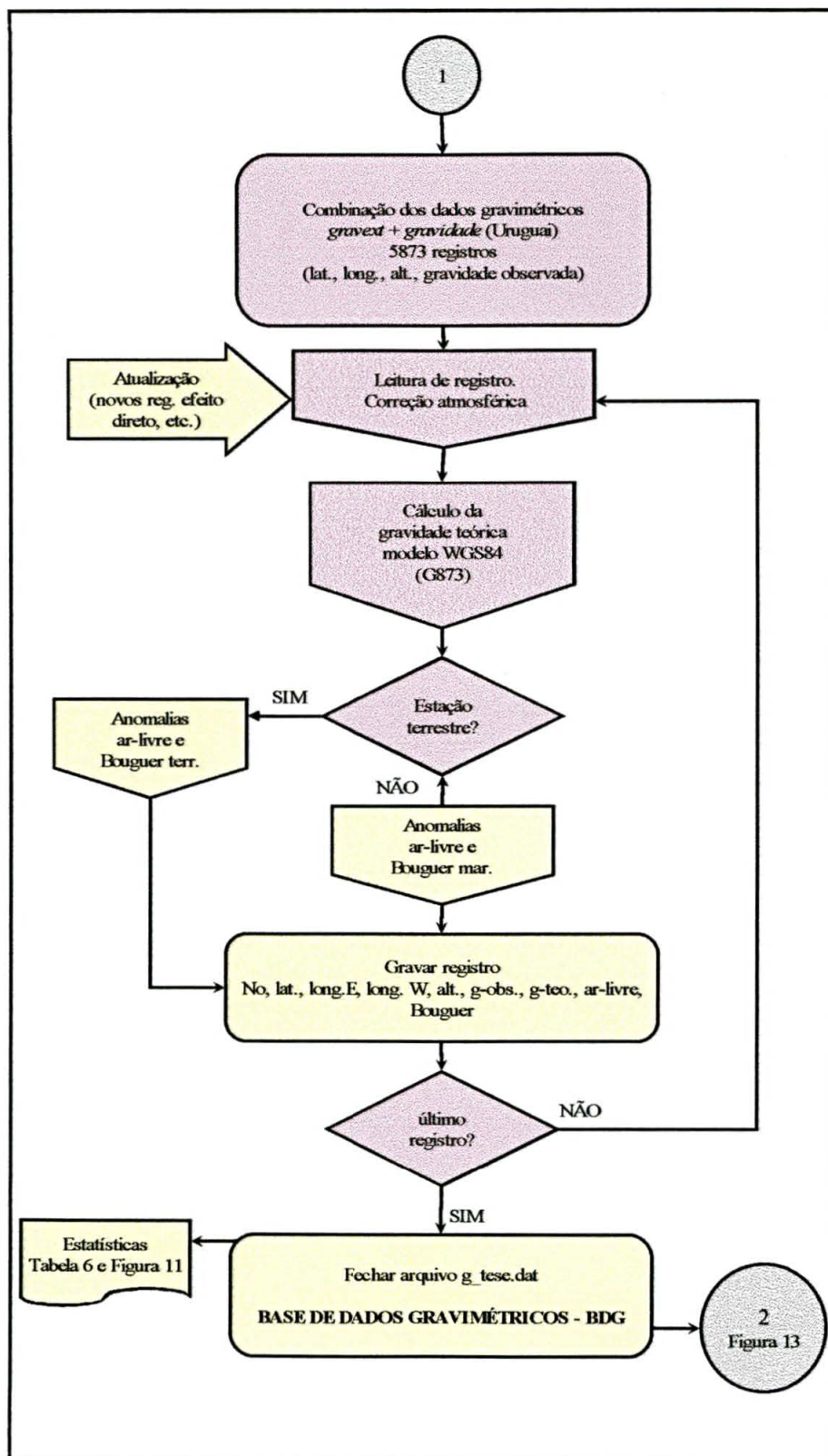


Figura 10 Formação da Base de Dados Gravimétricos (BDG).
Segunda parte (Combinação e processamento dos dados).

As estatísticas da BDG apresentam-se na Tabela 6, estando as altitudes expressas em metros e as anomalias em mGal. A Figura 11, mostra a distribuição geográfica dos dados e as quadriculas correspondentes à comparação das diferentes bases de dados (Figura 9), a numeração das quadriculas corresponde com a da Tabela 5. A Figura 12, apresenta um exemplo de como as diversas fontes complementaram-se, especificamente na primeira quadricula analisada.

Tabela 6. Valores estatísticos da Base de Dados Gravimétricos.

5.783 estações	Máximo	Mínimo	Média	Desv. Padrão	Variação
Latitude	-29°	-36°	32,67°	-	7°
Longitude	307,99°	300°	303,15°	-	7,99°
Altitude (m)	692,9	-37,5	97,01	98,01	730,4
Ar-livre (mGal)	100,639	-35,788	17,777	15,588	136,427
Bouguer (mGal)	99,945	-56,846	6,876	13,629	156,791

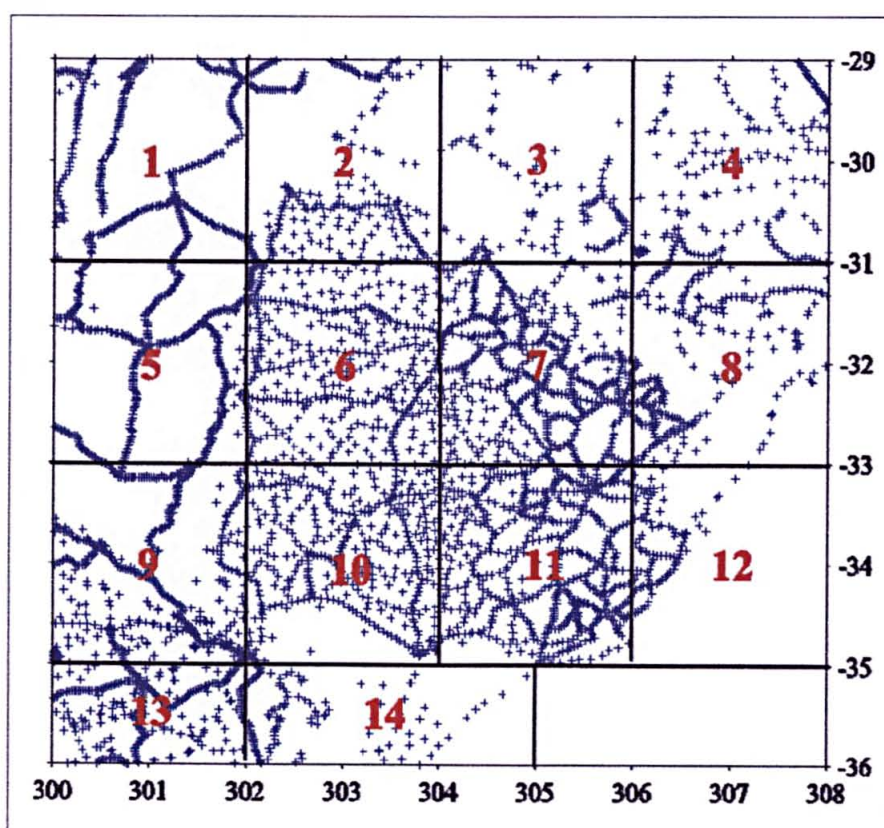


Figura 11. Distribuição geográfica dos dados gravimétricos diretamente observados e quadriculas de seleção de dados.

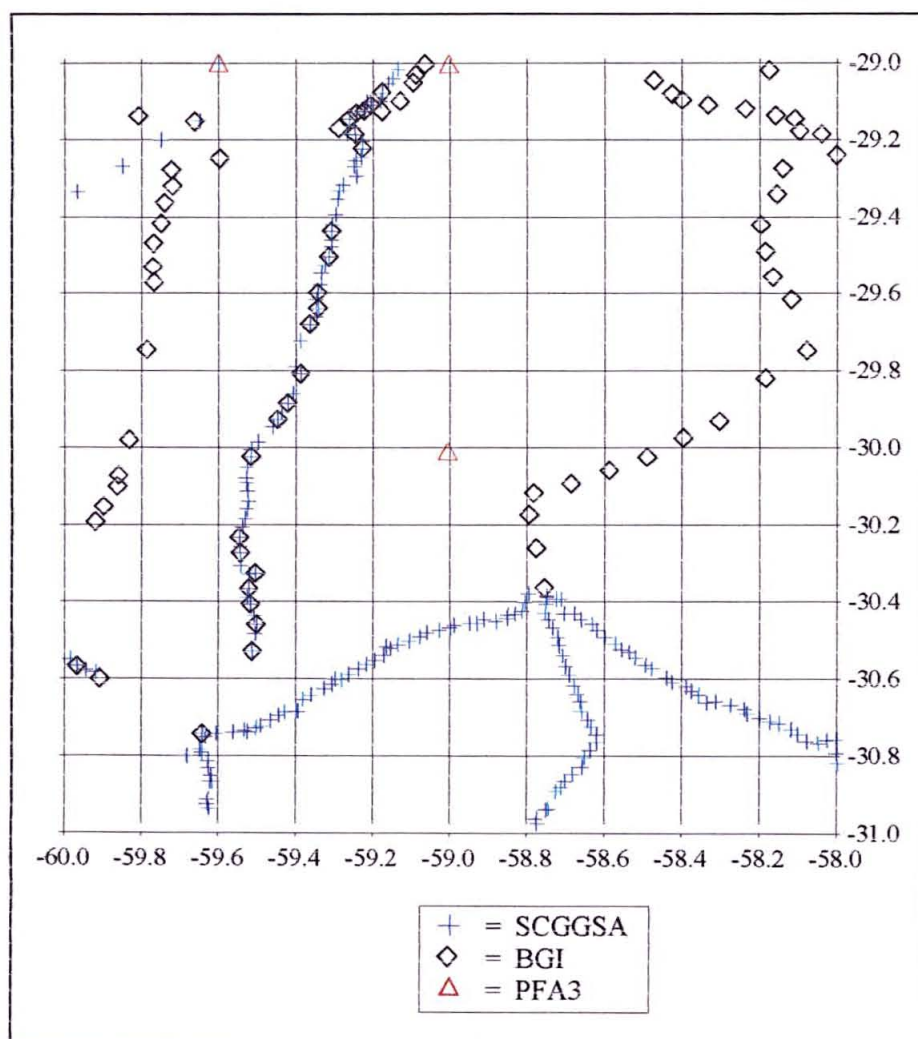


Figura 12. Exemplo de análise de dados, quadrícula 1.

A Figura 13, apresenta a fase final da geração dos dados gravimétricos necessários no cálculo do modelo geoidal.

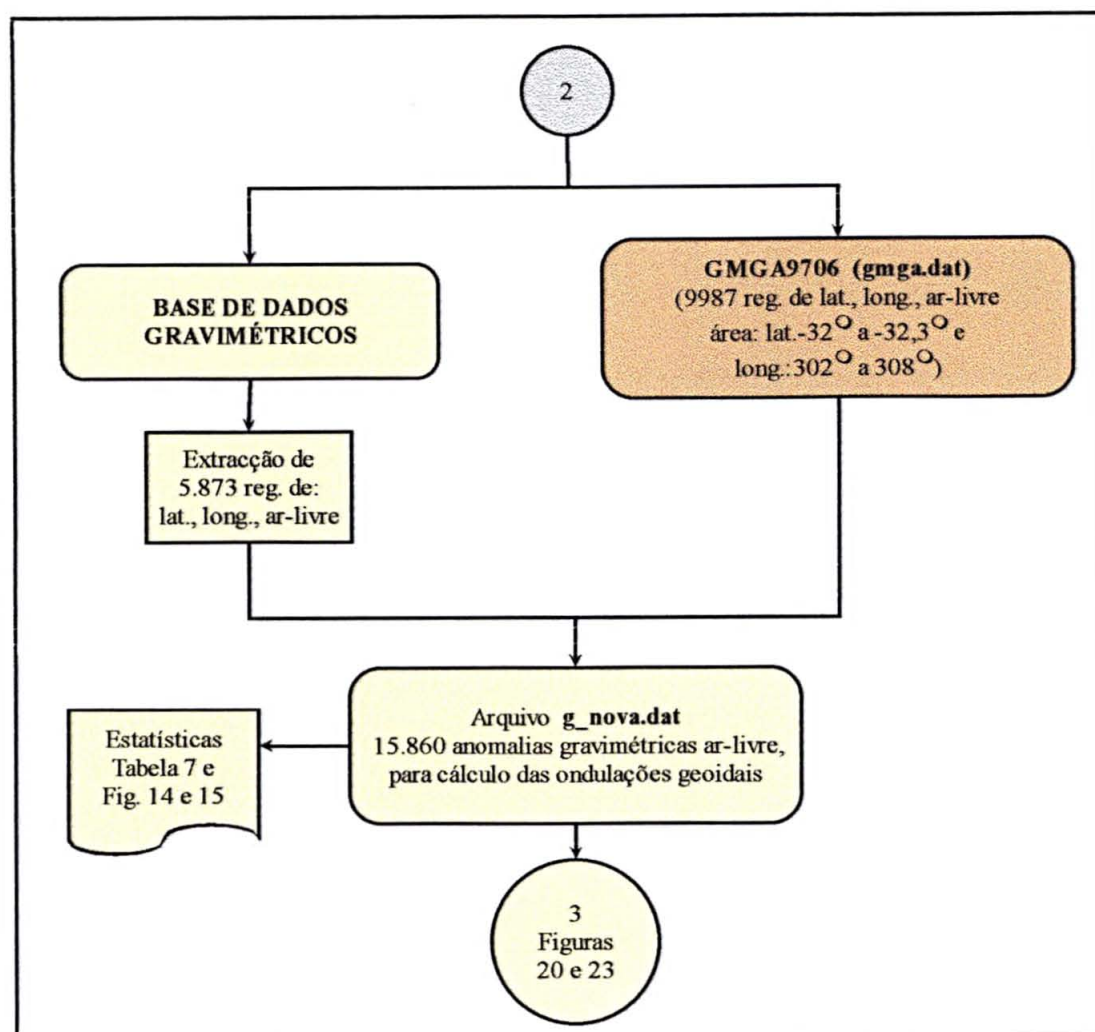


Figura 13. Formação do arquivo de anomalias gravimétricas.
Terceira parte (Combinação final dos dados gravimétricos).

A partir da BDG são extraídos 5.873 dados de coordenadas geográficas e anomalias ar-livre, os quais são combinados com 9.987 dados, nas áreas oceânicas e marinhas, do modelo global de anomalias de ar-livre GMGA9706. As estatísticas do arquivo final de anomalias gravimétricas ar-livre estão na Tabela 7.

Tabela 7. Valores estatísticos do arquivo de anomalias ar-livre.

15.860 registros	Máximo	Mínimo	Média	Desv. Padrão	Variação
Latitude	-29°	-36°	34,97°	-	7°
Longitude	308°	300°	304,71°	-	8°
Altitude (m)	692,9	-37,5	35,46	75,46	730,4
Ar-livre (mGal)	100,639	-35,788	13,317	16,246	136,427

As Figura 14 e 15, apresentam a distribuição final dos dados gravimétricos usados e as correspondentes anomalias gravimétricas ar-livre.

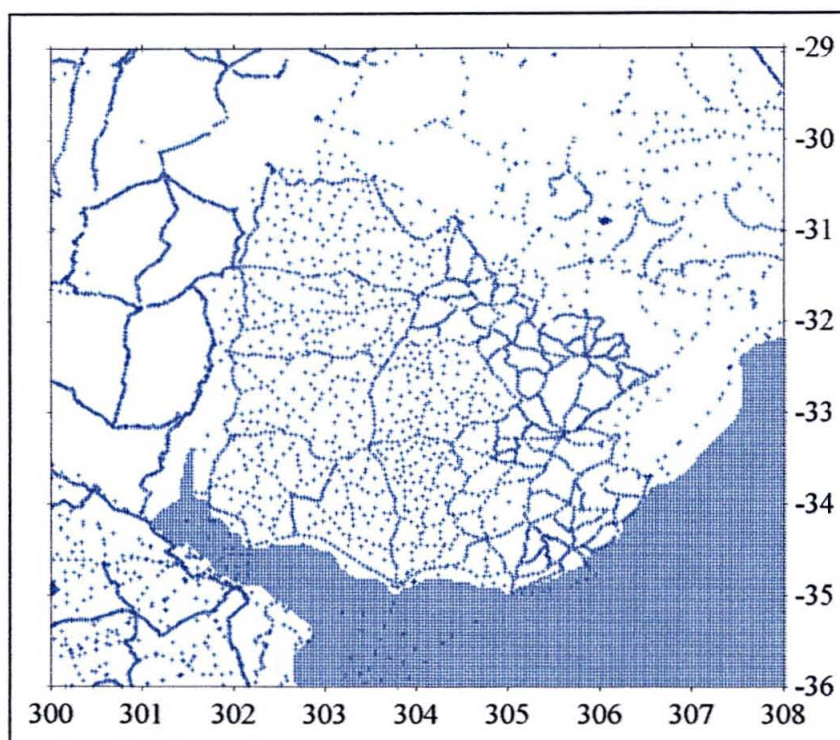


Figura 14. Distribuição geográfica final do arquivo de anomalias gravimétricas de ar-livre.

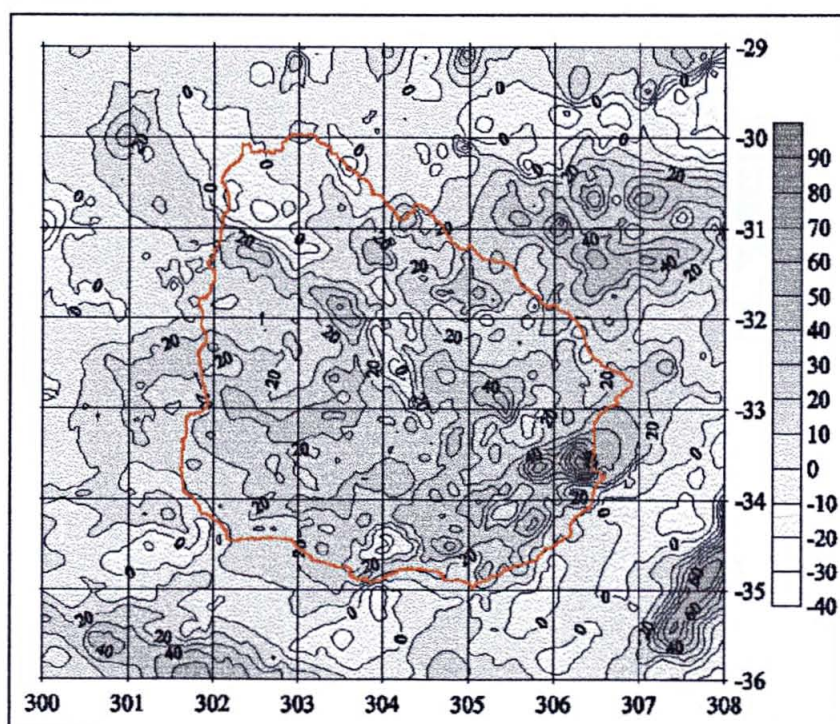


Figura 15. Anomalias gravimétricas ar-livre (intervalo de contorno: 1 mGal).

4.4.2 Contribuição topográfica

A Figura 16, apresenta o histograma com a informação correspondente a como foi feita a combinação das três fontes de dados topográficos disponíveis, ou seja o modelo global GTOPO30 (parte superior esquerda), o MTD do Uruguai (centro) e os dados parciais pertencentes ao MTD do Brasil (parte superior direita), com as diferentes resoluções espaciais de cada uma das fontes.

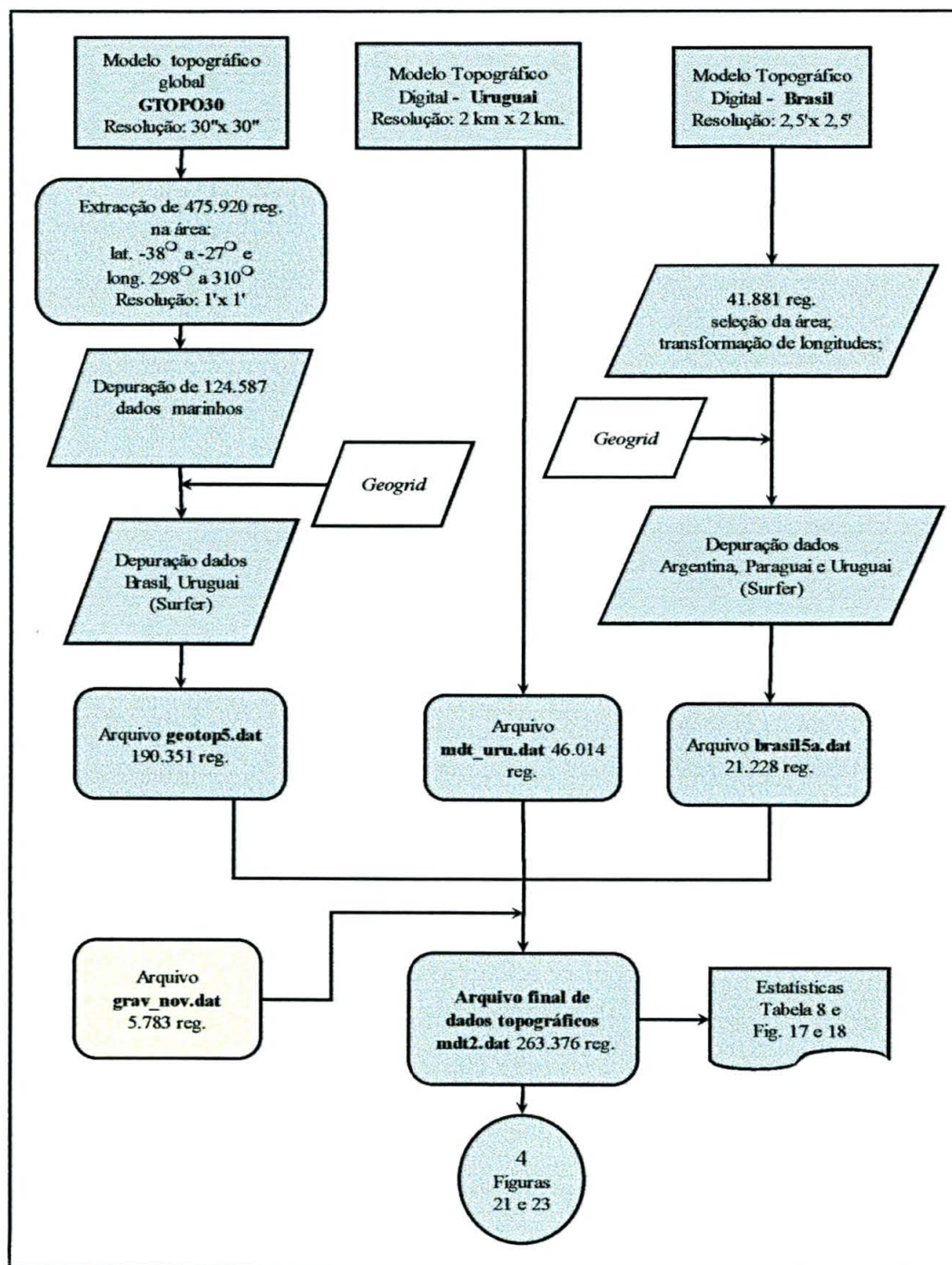


Figura 16. Formação do arquivo de dados topográficos.

Do modelo GTOPO30 foram extraídos dados com espaçamento de 1' em latitude e longitude, eliminando-se os valores de -9999 m de altitude nas áreas marinhas. Estes valores, foram usados pelo modelo para indicar a carência de informação altimétrica. Logo após, os dados são colocados na forma de malha e eliminados àqueles pertencentes às áreas do Brasil e do Uruguai.

No MTD do Brasil, o procedimento é semelhante e após a seleção dos registros e a transformação da coordenada em longitude (cuja origem era originalmente leste), os dados são dispostos na forma de malha e eliminadas as áreas da Argentina, do Paraguai e do Uruguai. Os arquivos resultantes destes processos são combinados com o MTD do Uruguai e com um arquivo gerado a partir das altitudes das estações gravimétricas observadas, (mais uma informação altimétrica, normalmente com melhor precisão que os MTD), a fim de formar o arquivo final de dados topográficos (centro e parte inferior da Figura 16).

A Tabela 8 contém as estatísticas correspondentes de cada fonte e do arquivo final, denominado de **mdt2**, enquanto a distribuição de dados, com um total de 263.376 registros com espaçamento de aproximadamente 1,3' em latitude e longitude, é mostrado na Figura 17.

Tabela 8. Valores estatísticos dos arquivos de dados topográficos combinados.

Arquivo	No. dados	Máximo (m)	Mínimo (m)	Média (m)	Desv. Pad.	Resolução
Geotop5	190351	732	1	68,15	58,34	1'
Brasil5a	21228	1340	-2459	219,96	359,85	2,5'
mdt_u ru	46014	425	-2300	104,13	85,03	2 km
Grav_nov	5783	629,9	-37,5	97,01	98,01	5'~10'
mdt2	263376	1340	-2459	87,52	126,37	≈ 1,3'

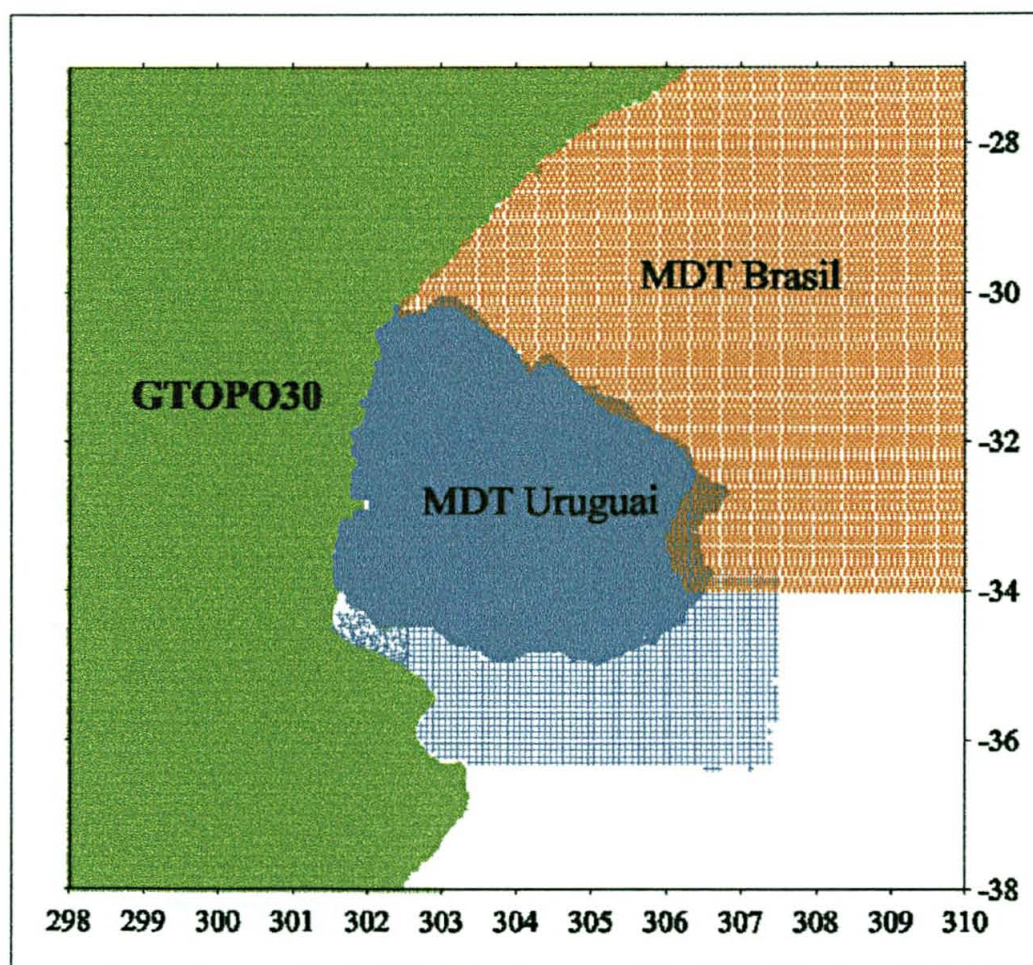


Figura 17. Distribuição dos dados topográficos selecionados.

Com efeito de controle visual do MTD obtido, foi gerada uma quadricula com espaçamento de 2,5' em latitude e longitude e método de interpolação de Krigging (Figura 18). Nota-se o relevo topográfico mais elevado do Uruguai e do Brasil, em relação à planície da província de Buenos Aires e a zona oeste da Argentina, assim como a área oceânica, o Rio da Prata e o Rio Paraná.

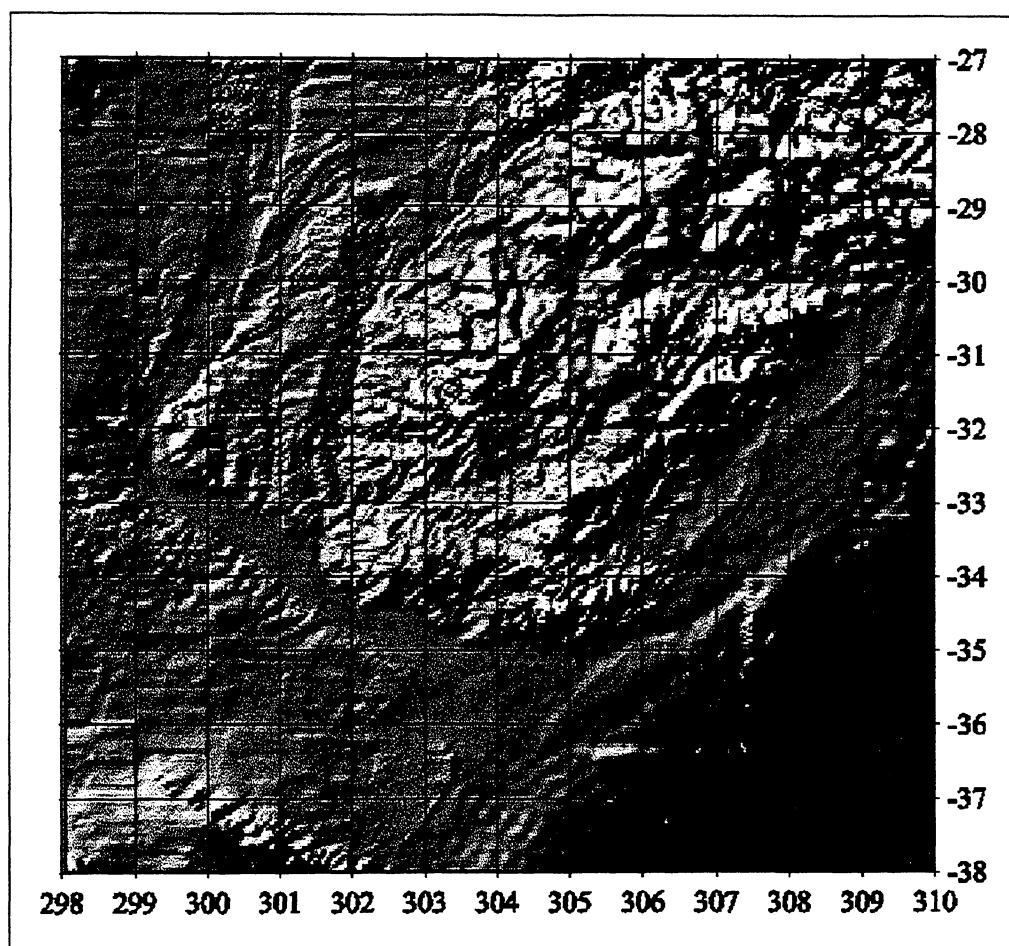


Figura 18. Imagem do MTD com espaçamento de 2,5' x 2,5'.

4.4.3 Modelos geoidais determinados.

Cada modelo geoidal calculado, é a combinação de um modelo geopotencial, anomalias de gravidade e dados topográficos. As Figuras 19, 20, 21 e 22, apresentam o fluxograma de cálculo dos modelos geoidais baseados no modelo geopotencial EGM96 (180 e 360).

As Tabelas e Figuras, mencionadas nas Figuras das seções seguintes, referem-se ao Capítulo 5-Resultados.

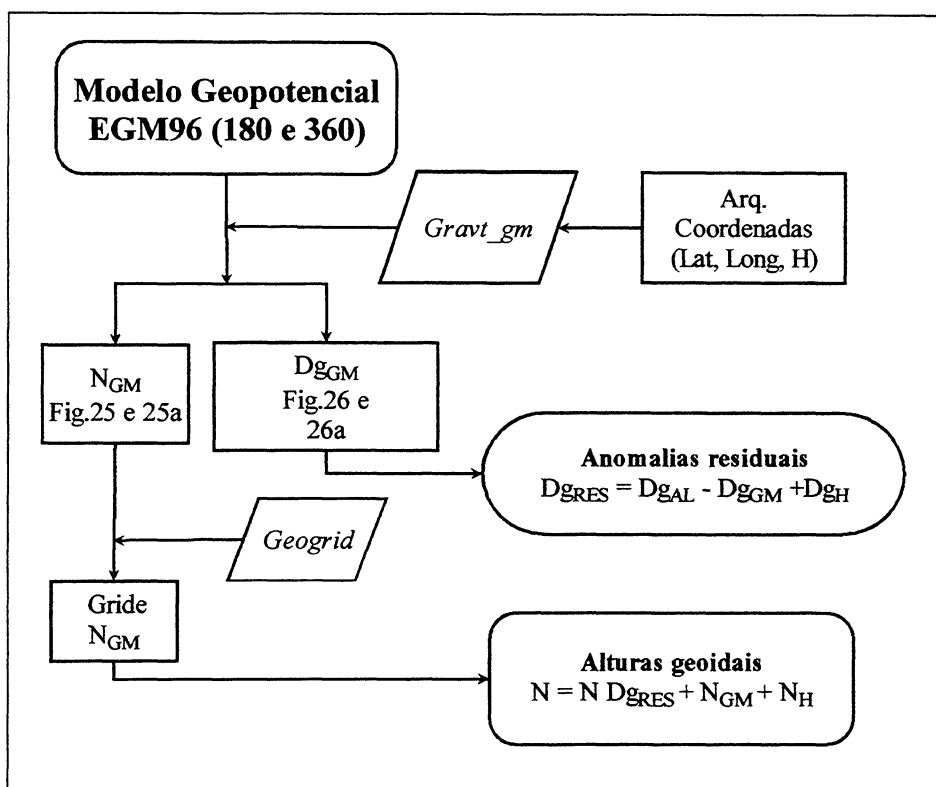


Figura 19. Cálculo dos modelos geoidais 1 e 2 (EGM180 e EGM360).
Primeira parte, o uso do modelo geopotencial.

Nesta Figura 19, mostra-se o modelo geopotencial EGM96, completo até o grau e a ordem 180 e 360 graus. A partir de cada um deles e usando um arquivo contendo as coordenadas das estações gravimétricas, são calculadas com o programa *Gravt_gm*, as alturas geoidais (N_{GM}) e as anomalias gravimétricas ar-livre (Dg_{GM}), correspondentes a cada desenvolvimento do modelo geopotencial mencionado. As anomalias gravimétricas geradas entram diretamente no cálculo das anomalias residuais, enquanto as alturas geoidais do modelo geopotencial, são colocadas na forma de malha com o programa *geogrid*, entrando no processo de cálculo das alturas geoidais finais.

Na seguinte Figura 20, a partir do arquivo de anomalias ar-livre (resultado final mostrado na Figura 13), é criado um arquivo com as coordenadas de cada estação gravimétrica, o qual servirá para calcular as contribuições do modelo geopotencial (como foi mostrado na Figura anterior) e do terreno no processo de cálculo do modelo geoidal. O arquivo de anomalias ar-livre entra diretamente no processo de cálculo das anomalias gravimétricas residuais.

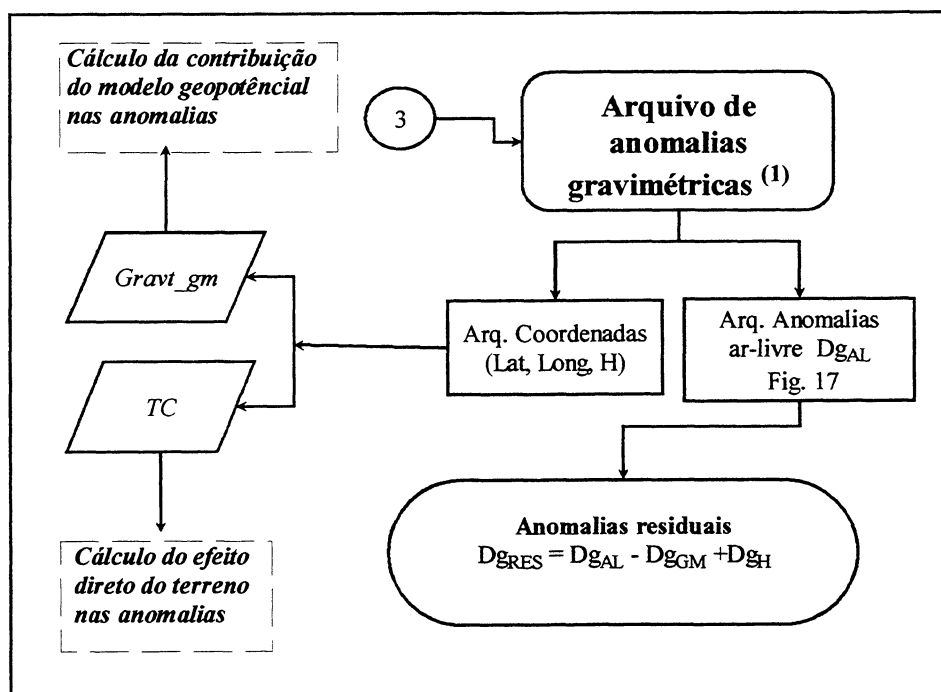


Figura 20. Cálculo dos modelos geoidais 1 e 2 (EGM180 e EGM360).

Segunda parte, uso das anomalias gravimétricas ar-livre.

Na Figura 21, mostra-se que a partir do arquivo de dados topográficos, obtiveram-se dois arquivos no formato de quadrícula, com resoluções espaciais de 1,5' x 1,5' e 3' x 3' respectivamente. O programa de geração das malhas usado foi o *geogrid*. Usando estas duas malhas e os programas *tc* e *ind*, são calculados o efeito direto do terreno nas anomalias gravimétricas e o efeito indireto do terreno nas alturas geoidais, causado pelo emprego do segundo método de condensação de Helmert.

No caso do efeito direto, é usado o arquivo de coordenadas das estações gravimétricas para calcular o efeito em cada ponto gravimétrico, no caso do efeito indireto, é calculada uma malha com a mesma área e resolução espacial das alturas geoidais a serem calculadas.

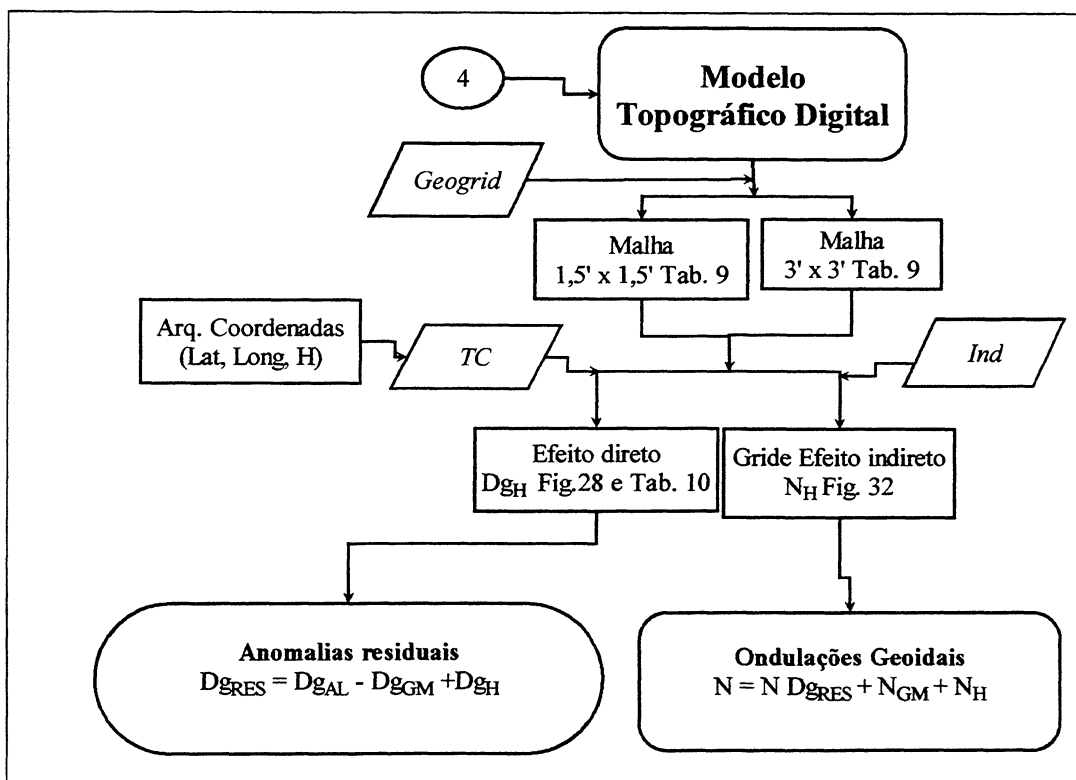


Figura 21. Cálculo dos modelos geoidais 1 e 2 (EGM180 e EGM360).

Terceira parte, uso dos dados topográficos.

Na Figura 22, mostra-se o processo de cálculo das anomalias gravimétricas residuais. Estas são obtidas a partir da combinação da componente gravimétrica do modelo geopotencial EGM96, do arquivo de anomalias gravimétricas ar-livre e do efeito direto do terreno obtido do arquivo de dados topográficos. As anomalias gravimétricas geradas, são dispostas na forma de malha e logo após é usado o programa *fftgeoid*, para se obter uma malha de alturas geoidais residuais. Cálculos adicionais são feitos, com diferentes opções do núcleo da fórmula de Stokes, com o objetivo de conhecer a sua implicação nos modelos. No processo final, as alturas geoidais residuais do passo anterior, são combinadas com uma malha de alturas geoidais do modelo EGM96 e do correspondente efeito indireto do método de condensação usado. Obteve-se assim as alturas geoidais finais dos modelos 1 e 2, denominados de EGM180 e EGM360. Os modelos passam logo para a correspondente etapa de Avaliação (Figura 24). Como produto do cálculo, o efeito direto do terreno é adicionado como mais um dado gravimétrico de interesse, na Base de Dados Gravimétricos do Uruguai (BDGU) (Figura 10).

tomando os oito pontos mais próximos com função de peso igual ao inverso da distância ($1/r$) entre o ponto a interpolar e os nodos na malha. O restante cálculo do modelo geoidal, segue os procedimentos já estabelecidos para os modelos 1 e 2, ou seja, a formação das anomalias residuais, o cálculo das alturas geoidais residuais com *ffigeoid* e a combinação final das alturas geoidais, levando em consideração o efeito indireto do terreno. A seção 2 do Capítulo 5 apresenta os resultados do processamento.

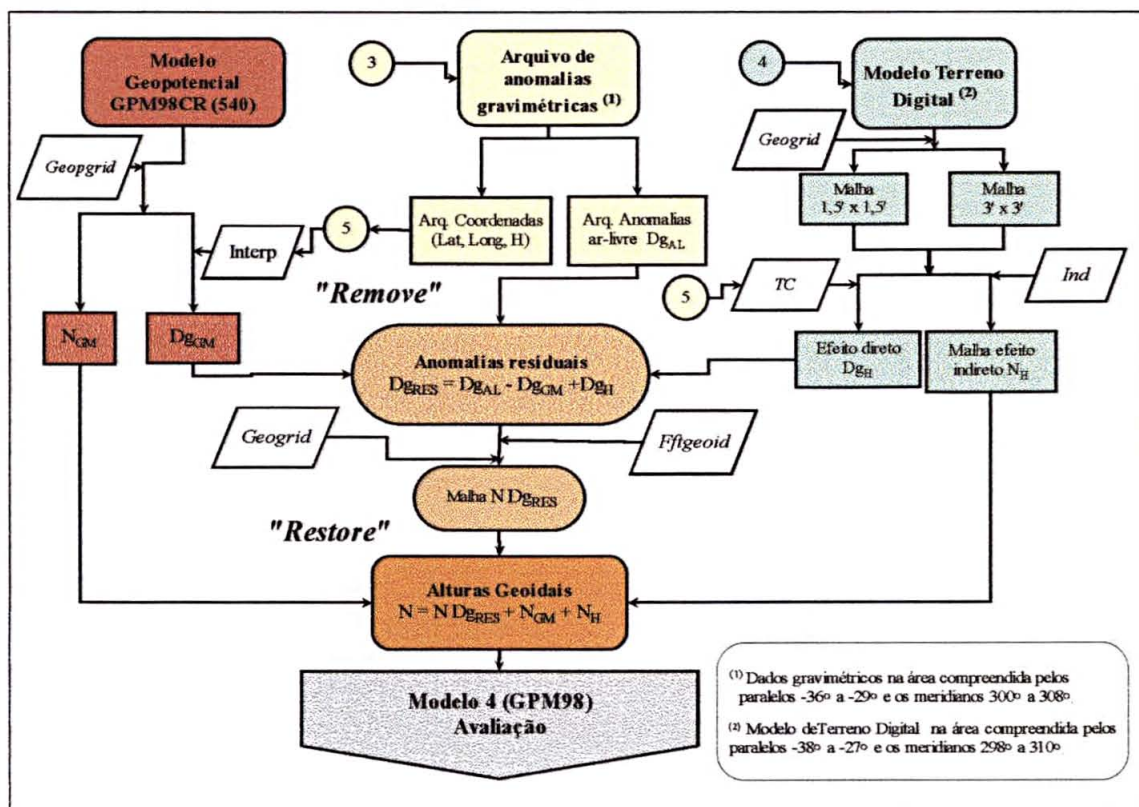


Figura 23. Cálculo dos modelo geoidal 4 (GPM540).

4.4.4 Outros testes realizados

A variedade de programas oferecidos pelo IGeS, através das Escola do Geóide, para cálculo de modelos geoidais e as diferentes opções dos mesmos, possibilitou a realização de vários testes, no decorrer das diversas etapas de cálculo realizadas. Na sequência, são apresentados alguns deles, especificamente:

- modelos do efeito direto de terreno, gerados pelos diversos programas disponíveis;
- cálculos com diferentes aproximações do núcleo da fórmula de Stokes;
- o uso de malhas com espaçamento maior do que 5', no cálculo dos modelos geoidais;

- o uso de anomalias ar-livre, obtidas a partir de anomalias Bouguer e o arquivo de dados topográficos, em vez de usar diretamente as anomalias ar-livre calculadas na BDG,
- a consideração do efeito indireto do terreno na gravidade, e finalmente,
- o uso de graus menores no desenvolvimento do geopotencial.

A Tabela 3, apresentada na seção 1 deste Capítulo, esclarece as diversas opções escolhidas em cada modelo.

4.4.4.1 Efeito do relevo topográfico.

Os testes com os efeitos do relevo topográfico (seção 9.2 do Capítulo 2), tiveram como objetivo escolher um programa adequado para a geração dos modelos e inclusão do efeito na BDG do Uruguai. Foram utilizados três diferentes programas: *tc2dftpl*, *tcfour* e *tc*, sendo que os dois primeiros usam FFT e o último a integração numérica clássica. O programa *tc2dftpl*, não têm implementado o cálculo do efeito do terreno nas áreas marinhas, por isso foi considerado inadequado. Para conhecer aproximadamente, os valores que forneceria nas áreas terrestres foi feito um teste, fixando um valor de altitude de 0 m para as altitudes negativas no mar. O resultado é apresentado na Figura 39 onde, na parte superior encontra-se o mapa correspondente, com curvas de anomalias de 0,1 mGal e na parte inferior uma imagem do mesmo efeito. Nota-se a elevada correlação dos efeitos com a topografia e a influência da topografia terrestre nas áreas marinhas, por mais de 1° de distância. Os valores do efeito na área de Uruguai ficaram entre 0 e 1 mGal.

O programa *tcfour*, considera os efeitos da batimetria, mas apresentou grandes distorções nas bordas da área de cálculo, possivelmente causadas por uma incorreta execução da técnica de “zero padding”, um fato que deveria ser investigado posteriormente. Outra distorção nota-se na área oceânica, causada pela falta de dados batimétricos e o posterior preenchimento com valores interpolados. Os valores do efeito no Uruguai, ficaram entre 0 e 0,1 mGal, sendo que a Figura 40, apresenta os resultados do cálculo.

Finalmente usou-se o programa *tc*, que considera a batimetria e implementa uma técnica de cálculo por integração numérica dos efeitos. Pelos resultados obtidos e os problemas expostos dos anteriores programas, foi o programa usado neste trabalho, como explicado nos itens anteriores deste capítulo.

4.4.4.2 Testes no núcleo da fórmula de Stokes

No programa *fftgeoid*, calculou-se as alturas geoidais com três opções diferentes, estabelecendo-se a diferença entre elas (seção 3.2, do Capítulo 5). O cálculo com o núcleo esférico rigoroso via 1DFFT (expressão (81), opção 5 do programa), foi tomado como padrão, já que não efetua aproximações e fornece resultados semelhantes à integração numérica (Sideris, 1997). As duas outras opções testadas foram o cálculo com núcleo da fórmula de Stokes na forma plana (expressão (68) e opção 1) e o núcleo esférico aproximado, via 2DFFT (expressão (79) e opção 4). A Figura 41 apresenta os resultados da diferença entre as opções 1 e 5, achando-se em Uruguai máximas entre -6 e +8 cm, enquanto a Figura 42 mostra as opções 4 e 5 com máximas de 0,01 m. A diferença encontrada entre as opções, foi considerada desprezível, face às avaliações feitas nos modelos e apresentadas no Capítulo 6, porém o núcleo esférico rigoroso é aconselhável quando desejada uma precisão centimétrica na altura geoidal.

4.4.4.3 Espaçamento de quadrículas de 10'x 10'

Na Argentina, os dados gravimétricos apresentam vazios de informação, principalmente na zona noroeste, como foi visto na descrição dos dados (Capítulo 3). O espaçamento escolhido para as malhas geradas no cálculo dos modelos iniciais, foi de 5', porém, reconhece-se que este espaçamento apenas reflete a realidade dos dados gravimétricos no Uruguai e parte do Brasil. Assim, foi calculado o modelo 3 (EGM360b), baseado no modelo do geopotencial EGM96 completo até o grau de 360 e com espaçamento de 10' x 10' (seção 3.3). Desta forma pretendeu-se testar, principalmente, se os valores da malha gerada seriam mais representativos da realidade do que a usada nos modelos anteriores. Os efeitos de terreno e o resto do procedimento, foi o já descrito para esses modelos. Os resultados, em termos de modelo geoidal final, não tiveram diferenças significativas, sendo apresentados na Figura 43. A avaliação do novo modelo, é apresentada no Capítulo 6.

4.4.4.4 Modelo com anomalia ar-livre, calculada a partir da anomalia Bouguer

A topografia suave do Uruguai e Argentina, e a realização das linhas gravimétricas nestes países, normalmente sobre estradas localizadas nas partes altas do terreno, levou a usar diretamente a anomalia ar-livre calculada na BDG. Neste modelo 5, denominado de GPM540b, usou-se o modelo geopotencial GPM98CR até o grau e a ordem de 540 e a anomalia ar-livre, calculada como é descrito na sequência.

O arquivo da anomalia ar-livre foi formado a partir da anomalia Bouguer padrão da BDG, incluindo diretamente nas áreas marinhas anomalias de ar-livre do modelo GMGA9796. Este arquivo foi colocado na forma de malha, com espaçamento regular de 5' x 5' em cada eixo. A conversão entre as anomalias, foi calculada através do arquivo de dados topográficos com a fórmula

$$\delta\Delta g = 0,1119 H \text{ mGal}, \quad (116)$$

sendo H a altitude da estação gravimétrica. Na seqüência, os resultados foram colocados na forma de malha, com espaçamento regular de 5' x 5'. Finalmente foram somadas as malhas de anomalias Bouguer padrão e de conversão entre anomalias, obtendo assim a nova malha de anomalia ar-livre. A Figura 44 (seção 5.3.4), mostra as diferenças entre esta malha obtida e a malha usada nos modelos anteriores (1, 2, 3 e 4), extraída diretamente da BDG.

4.4.4.5 Modelo com anomalia ar-livre calculada a partir da anomalia Bouguer, considerando o efeito indireto do terreno na gravidade

A Tabela 16, mostra as estatísticas e diferenças entre o efeito direto de terreno simples e o efeito direto somado do efeito indireto na gravidade (expressão (46) do Capítulo 2). Este último parâmetro mencionado foi empregado no modelo 6, denominado de GPM540c, enquanto o efeito direto simples foi o utilizado no cálculo dos modelos 1 a 5.

4.4.4.6 Modelo Final

Este modelo inclui o modelo geopotencial EGM96, até o grau 120, combinado com anomalia ar-livre obtida a partir da Bouguer correspondente, usando espaçamento de 10' x 10' e considerando o efeito indireto do terreno na gravidade. A finalidade deste modelo foi testar o efeito de conjunto, das diversas opções usadas isoladamente em modelos anteriores. O uso do modelo EGM96 (120), teve como finalidade fornecer um peso maior no cálculo do modelo geoidal à gravidade observada. A Figura 50 mostra as alturas geoidais finais obtidas.

4.4.5 Avaliação dos modelos geoidais

Finalmente na Figura 24 a seguir, apresenta-se a avaliação feita para cada modelo. A malha de alturas geoidais gerada e dois conjuntos de dados de teste (observações GPS/RNs) são processados com o programa *ondula*, que faz uma interpolação linear a partir da malha de alturas geoidais, em pontos especificados pelas coordenadas dos dados de teste e fornece como saída a altura geoidal do modelo a ser testado nestes pontos. O arquivo resultante é

processado numa planilha de cálculo, para a obtenção das diferenças com as alturas geoidais observadas com GPS e permite obter as estatísticas necessárias para a comparação e avaliação do modelo. O processo foi efetuado tanto para os dois conjuntos de dados.

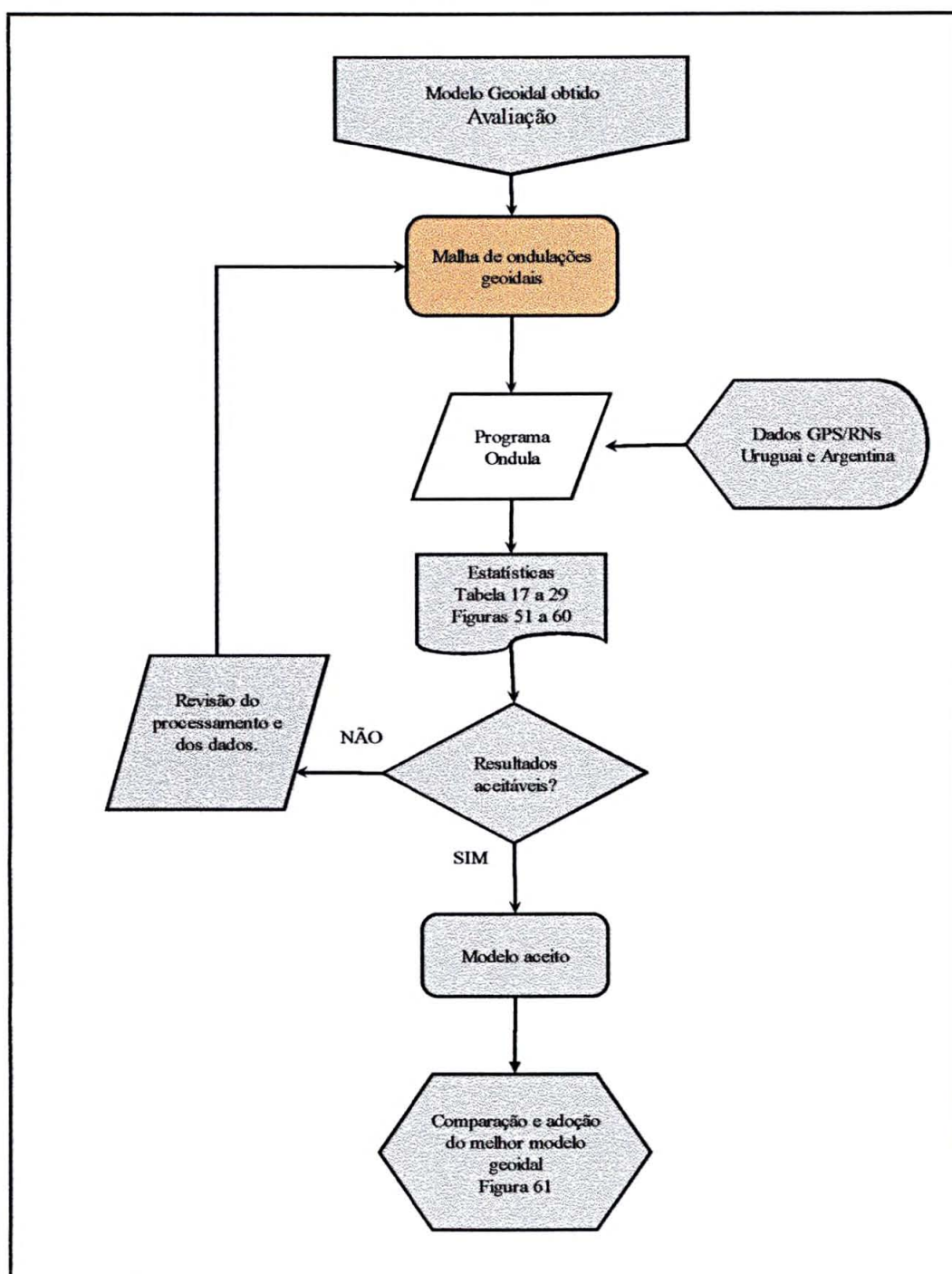


Figura 24. Processo de avaliação dos modelos geoidais obtidos.

CAPÍTULO 5 - RESULTADOS

Este Capítulo está destinado à apresentação, através de Figuras e Tabelas, dos resultados obtidos usando os dados disponíveis, descritos no Capítulo 3 e com a metodologia detalhada no Capítulo 4. Para esclarecer a apresentação dos 7 modelos calculados e os teste adicionais realizados, a apresentação terá a seguinte seqüência:

- A **seção 1**, estará dedicada aos modelos 1 e 2, baseados no modelo geopotencial EGM96 e denominados de EGM180 e EGM360. Para cada um dos modelos mencionados, são oferecidos:
 - Alturas geoidais, obtidas a partir do modelo geopotencial, até um grau e ordem especificado em cada Figura ;
 - Anomalias gravimétricas ar-livre, obtidas a partir do modelo geopotencial, até o mesmo grau e ordem especificado anteriormente;
 - Comparação das anomalias gravimétricas ar-livre calculadas a partir da gravidade observada, com as anomalias obtidas do modelo EGM96;
 - O efeito direto de terreno, obtido a partir das malhas geradas do MTD, mostrando-se numa Figura separada a relação entre as altitudes e as anomalias de ar-livre;
 - Anomalias gravimétricas residuais, resultantes do processo de decomposição;
 - Alturas geoidais residuais, calculadas com a fórmula de Stokes na forma esférica e com núcleo rigoroso (via 1DFFT);
 - O efeito indireto de terreno, e finalmente,
 - As alturas geoidais finais para ambos os modelos.

Na **seção 2**, é apresentado o modelo 4, baseado no modelo geopotencial GPM98CR, até o grau 540, na seguinte ordem:

- Alturas geoidais do modelo geopotencial, até o grau e ordem de 540;
- Anomalias gravimétricas de ar-livre do modelo geopotencial, até o mesmo grau mencionado;
- Anomalias gravimétricas residuais, resultantes do processo de decomposição;
- Alturas geoidais residuais , calculadas com a fórmula de Stokes na forma esférica e com núcleo rigoroso (via 1DFFT);
- e alturas geoidais finais.
- As diferenças estatísticas entre os modelos calculados inicialmente e apresentados nas seções acima mencionadas.

A **seção 3**, contém os diversos testes realizados.

Assim, são apresentados: os resultados dos programas de cálculo *tc2dfipl* e *tcfour* para a contribuição direta do relevo; os resultados das diferentes opções de cálculo da fórmula de Stokes; o uso de malhas de espaçamento de $10' \times 10'$; o cálculo da anomalia ar-livre a partir da anomalia Bouguer e o MTD e a influência deste cálculo, no modelo resultante, se comparado a modelos anteriores; a consideração do efeito indireto na gravidade no cálculo dos modelos; e um último modelo, combinando várias destas opções descritas.

A **seção 4**, estabelece alguns comentários e conclusões preliminares referentes aos resultados mostrados.

5.1 MODELOS GEOIDAIS BASEADOS NO EGM96

As contribuições do modelo geopotencial EGM96 no processo de decomposição, mostram-se nas Figuras 25 e 26 para o grau 180 e nas Figuras 25a. e 26a., para o grau 360 .

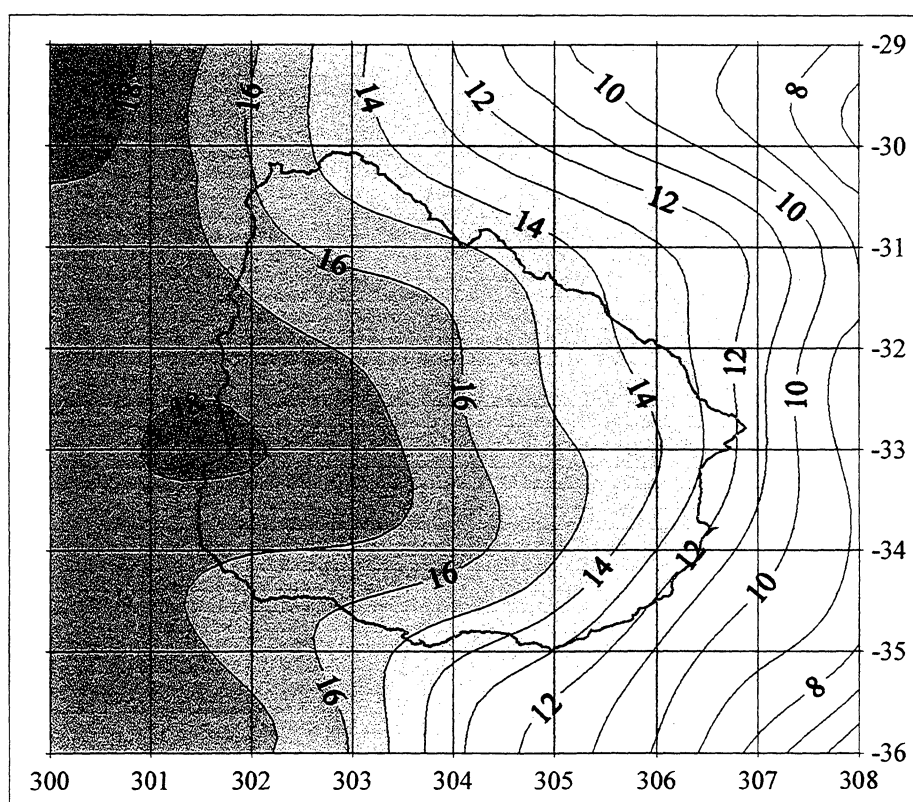


Figura 25. Alturas geoidais geradas pelo modelo geopotencial EGM96 (180)
(intervalo de contorno: 1 m).

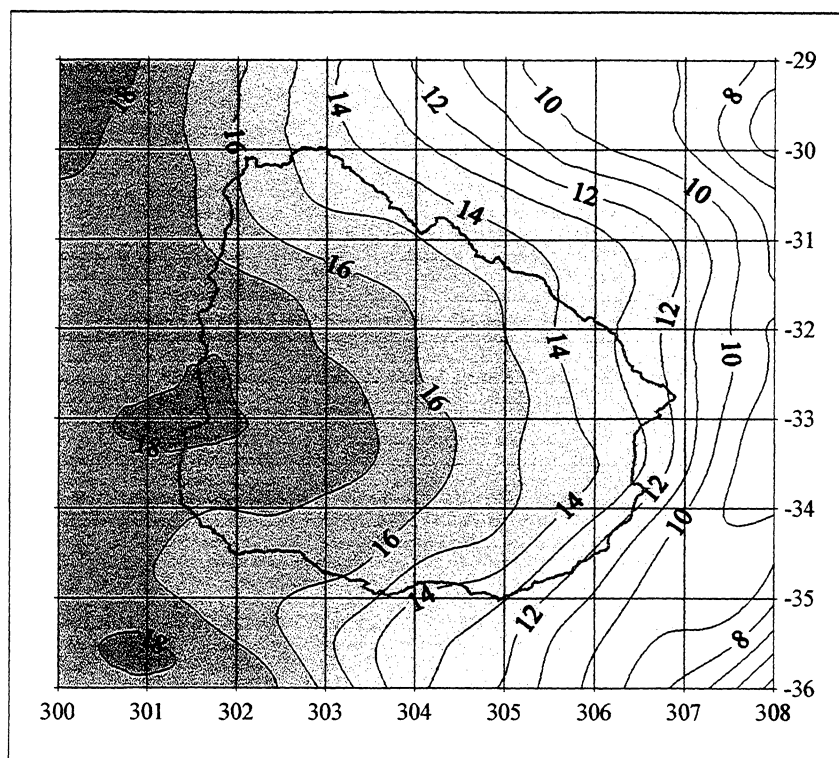


Figura 25a. Alturas geoidais geradas pelo modelo geopotencial EGM96 (360)
(intervalo de contorno: 1 m).

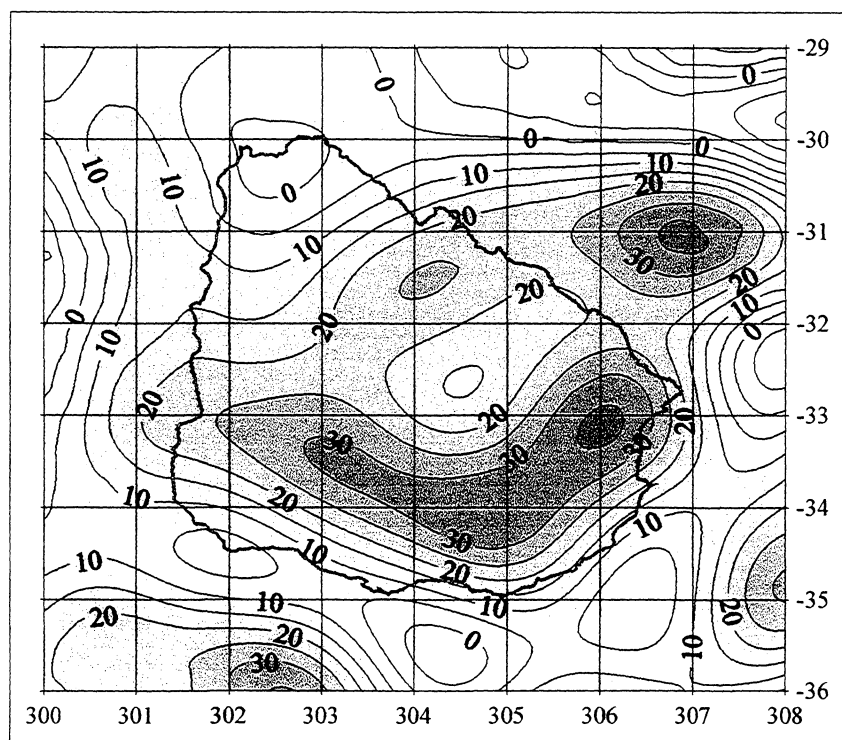


Figura 26. Anomalias gravimétricas ar-livre do modelo geopotencial EGM96 (180)
(intervalo de contorno: 5 mGal)

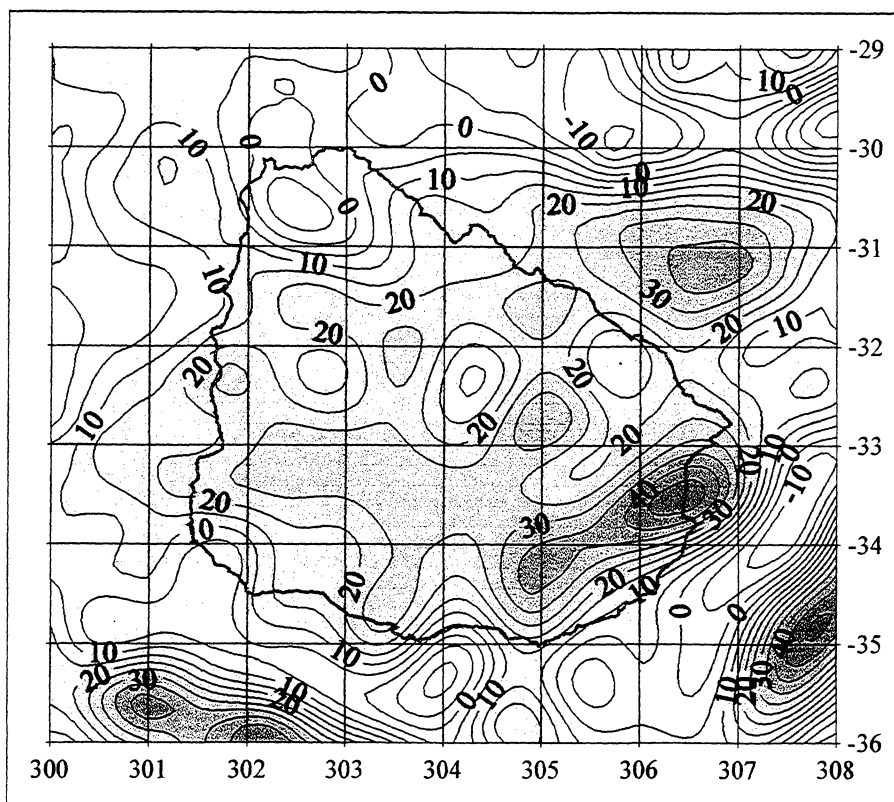


Figura 26a. Anomalias gravimétricas ar-livre do modelo geopotencial EGM96 (360)
(intervalo de contorno: 5 mGal)

Do arquivo de anomalias gravimétricas ar-livre (Figura 13, Capítulo 4), foi gerada a Figura 27, mostrando o comportamento na área de cálculo dos modelos geoidais.

Comparando as Figuras 26a e 27, nota-se a semelhança dos contornos em termos gerais, sendo que a configuração geral e as anomalias mais importantes, encontram-se bem determinadas em ambas.

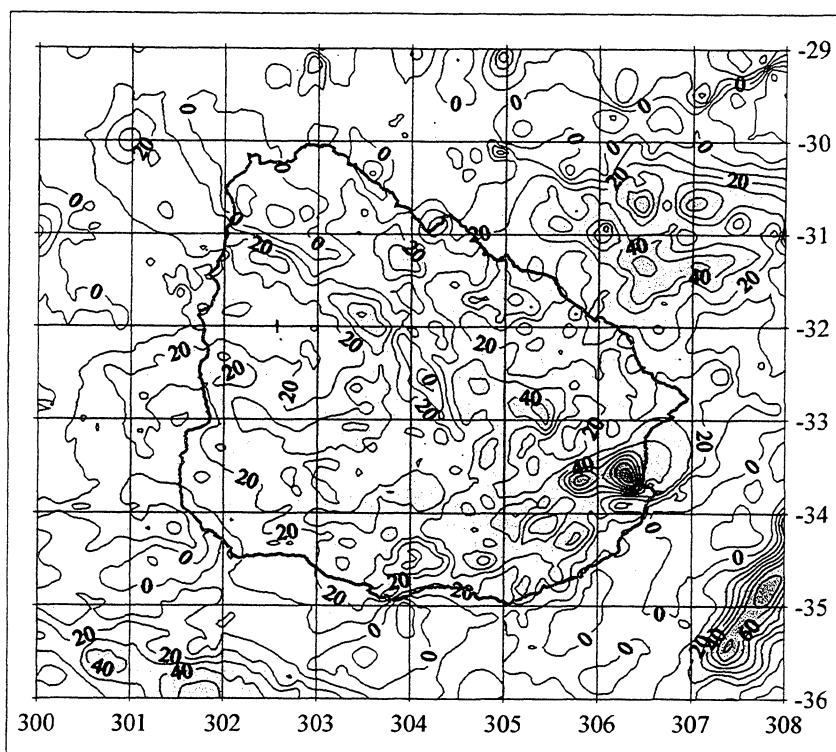


Figura 27. Anomalias gravimétricas ar-livre observadas (intervalo de contorno: 5 mGal).

Na geração dos efeitos de terreno, foi necessário criar duas malhas topográficas, com espaçamento de dados de 1,5' x 1,5' e 3' x 3', a fim de serem incluídas como entrada nos programas *tc* e *ind*. O programa de interpolação usado foi o *geogrid*, tomando as 20 estações mais próximas, até uma distância de 55 km do ponto de cálculo. As estatísticas dos arquivos calculados (extensão .grd) e do MTD (extensão .dat), são mostradas na Tabela 9. A diferença no valor médio obtido, entre o arquivo MTD e as malhas calculadas, deve-se ao preenchimento de valores nas áreas marinhas em que o MTD estava carente de informação.

Tabela 9. Estatísticas das malhas topográficas geradas.

Arquivo	Máx. (m)	Mín. (m)	Méd. (m)	Desv.Pad.	Espaça- mento	Resolução (km)	Linha x Coluna
MTD2.dat	1340	-2459	87,5	126	-	-	-
MTD2.grd	1340,0	-2390,9	- 0,4	421	1,5'	≈ 2,8	441 x 480
MTD2a.grd	1340,6	-2258,8	+0,4	420	3'	≈ 5,5	221 x 240

A Figura 28 na sequência, representa o cálculo do efeito direto de terreno, usando as malhas do MTD mencionadas e o arquivo de coordenadas das estações gravimétricas, fica clara a correlação dos valores obtidos com a topografia. A área de cálculo foi fixada entre os paralelos $-27,5^\circ$ a $-37,5^\circ$ e os meridianos $298,5^\circ$ a $309,5^\circ$ ($-61,5^\circ$ a $-50,5^\circ$), sendo $1,5^\circ$ maior que a área de dados de gravidade. No programa *tc*, foi empregada a malha detalhada do MTD até um raio de 12 km da estação considerada e a malha menos detalhada no resto da área de cálculo.

As estatísticas do arquivo gerado, com os 15.860 valores pontuais de efeito direto, se incluem na Tabela 10, coluna 6 da p. 86.

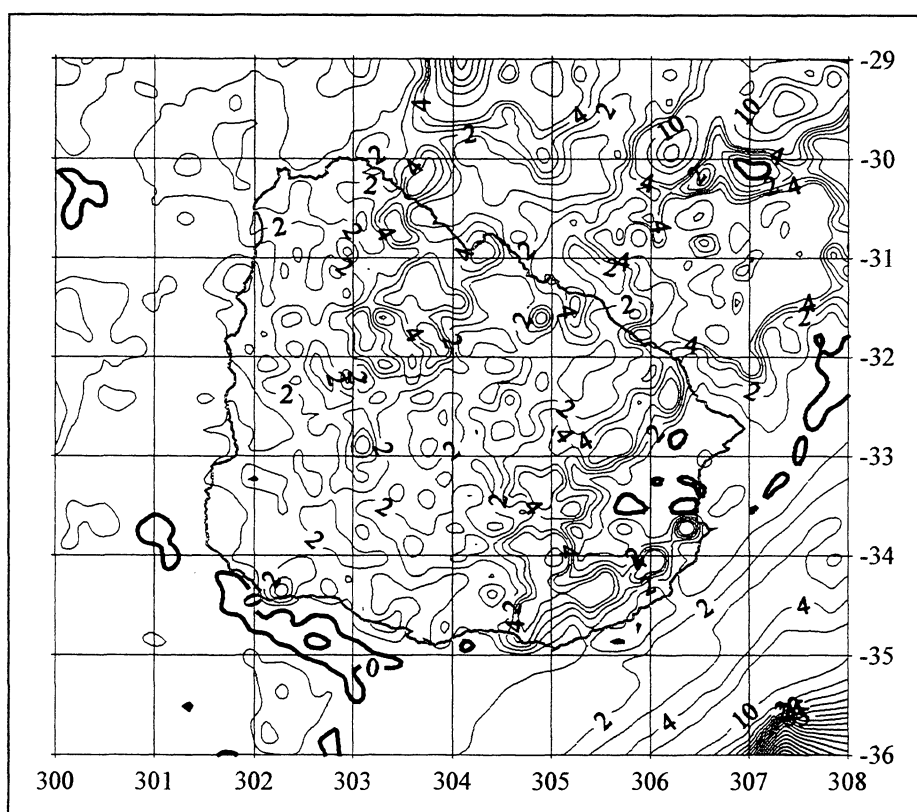


Figura 28. Efeito direto do terreno (intervalo de contorno: 1 mGal).

A Figura 29, mostra o efeito direto do terreno (CT), calculado através do segundo método de condensação de Helmert nas anomalias ar-livre terrestres e as correspondentes anomalias de Faye. Foram adicionadas no gráfico mencionado, as funções lineares de tendência de cada parâmetro, notando-se a maior correlação com a topografia das anomalias de Faye, em relação

às anomalias ar-livre. O valor da correção do terreno, nas estações gravimétricas do Uruguai, foi adicionado na respectiva base de dados.

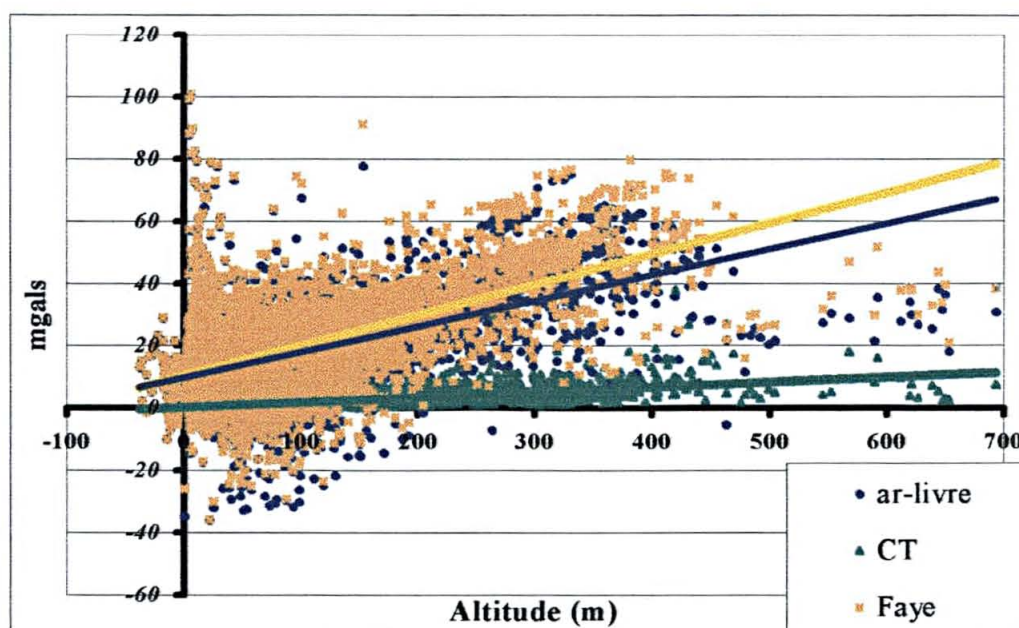


Figura 29. Correlação das anomalias ar-livre, de Faye e a correção de terreno, com as altitudes das estações gravimétricas.

Em conjunto, os dados das Figuras 26, 26a, 27 e 28, geraram os arquivos de anomalias residuais, apresentados na Figura 30 e 30a, estando as respectivas estatísticas contidas nas Tabelas 10 e 10a., para os modelos 1 (EGM180) e 2 (EGM360), respectivamente.

Porém os valores máximos e mínimos de gravidade não sofreram modificações importantes, note-se a diminuição da média nas anomalias residuais, provocada pelo processo de decomposição, ficando o território uruguaio (com poucas exceções na região sudeste), com valores de anomalias entre 0 e 10 mGal e com uma média de aproximadamente 4 mGal.

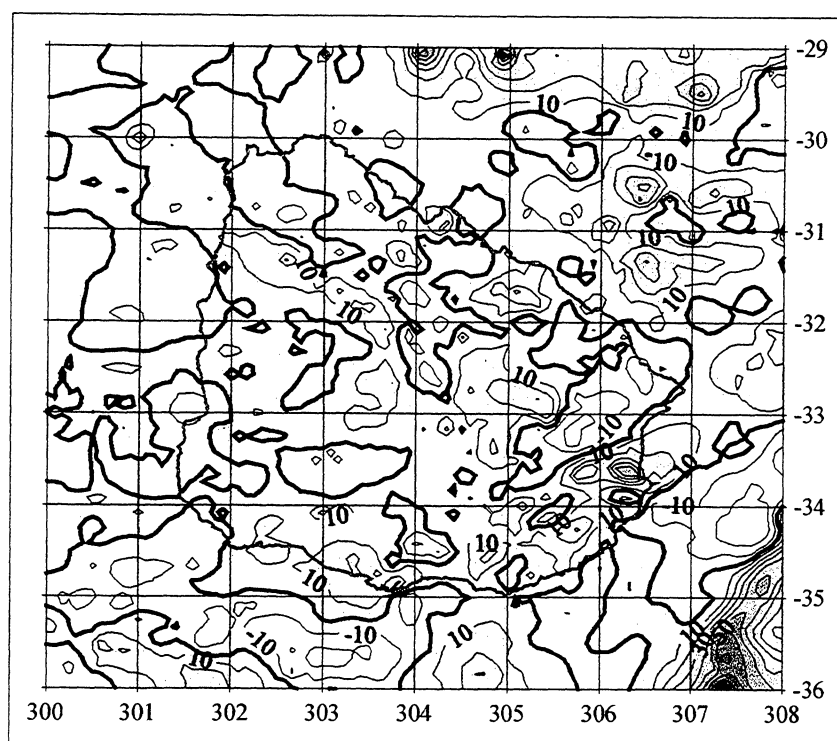


Figura 30. Anomalias gravimétricas residuais, após o processo de decomposição, modelo 1 (EGM180) (intervalo de contorno: 10 mGal).

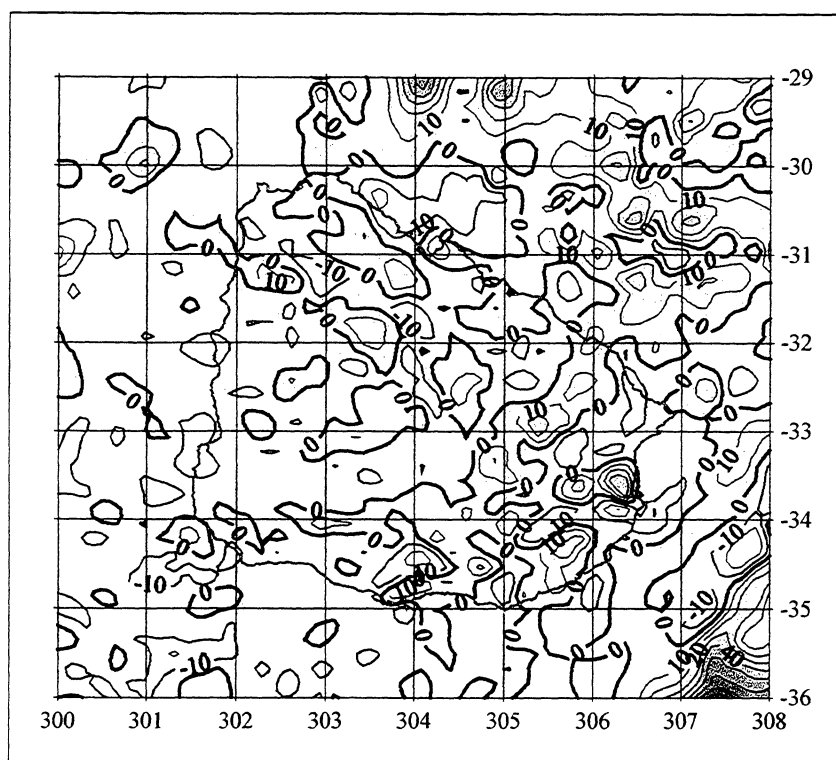


Figura 30a. Anomalias gravimétricas residuais, após o processo de decomposição, modelo 2 (EGM360) (intervalo de contorno: 10 mGal).

Tabela 10. Estatísticas do cálculo das anomalias residuais, modelo 1 (EGM180) (valores em mGal, quando não especificado).

15860 estações	Latitude (°)	Longitude (°)	Altitude (m)	Anomalia ar-livre	Efeito terreno¹⁷	Anomalia EGM96	Anomalia residual
Máximo	-29	308	692,9	100,639	103,080	36,914	98,460
Mínimo	-36	300	-37,5	-35,788	0	-15,667	-37,621
Média	-34,07	304,7	35,5	13,318	3,764	13,039	4,042
Desv.Pad.	-	-	75,7	16,247	9,483	9,600	16,130
Variação	7	8	730,4	136,427	103,080	52,581	136,081

Tabela 10a. Estatísticas do cálculo das anomalias residuais, modelo 2 (EGM360) (valores em mGal quando não especificado).

15860 estações	Latitude (°)	Longitude (°)	Altitude (m)	Anomalia ar-livre	Efeito terreno	Anomalia EGM96	Anomalia residual
Máximo	-29	308	692,9	100,639	103,080	51,066	96,737
Mínimo	-36	300	-37,5	-35,788	0	-27,664	-59,139
Média	-34,07	304,7	35,5	13,318	3,764	13,063	4,019
Desv.Pad.	-	-	75,7	16,247	9,483	13,901	12,577
Variação	7	8	730,4	136,427	103,080	78,730	155,876

Para o cálculo das alturas geoidais residuais, foi gerada previamente, uma malha com espaçamento regular em latitude e longitude de $0,083333^\circ$ (5'), usando na interpolação com *geogrid*, os 8 pontos mais próximos, pesados cada um deles em função da distância ao ponto de cálculo. As Figuras 31 e 31a, contém as malhas de alturas geoidais residuais, obtidas com o programa *fftgeoid*, usando o núcleo rigoroso da função (opção 5), via 1DFFT e uma representação das superfícies geradas para cada modelo. As alturas geoidais são expressas em metros.

¹⁷ Foram calculados pequenos valores negativos de efeito de terreno (inferiores a 0,2 mGal), resultantes do processo de densificação por interpolação de curvatura mínima, utilizado na zona interior. Na geração dos modelos geoidais, estes valores negativos foram fixados em 0 m, por carecerem de significado físico.

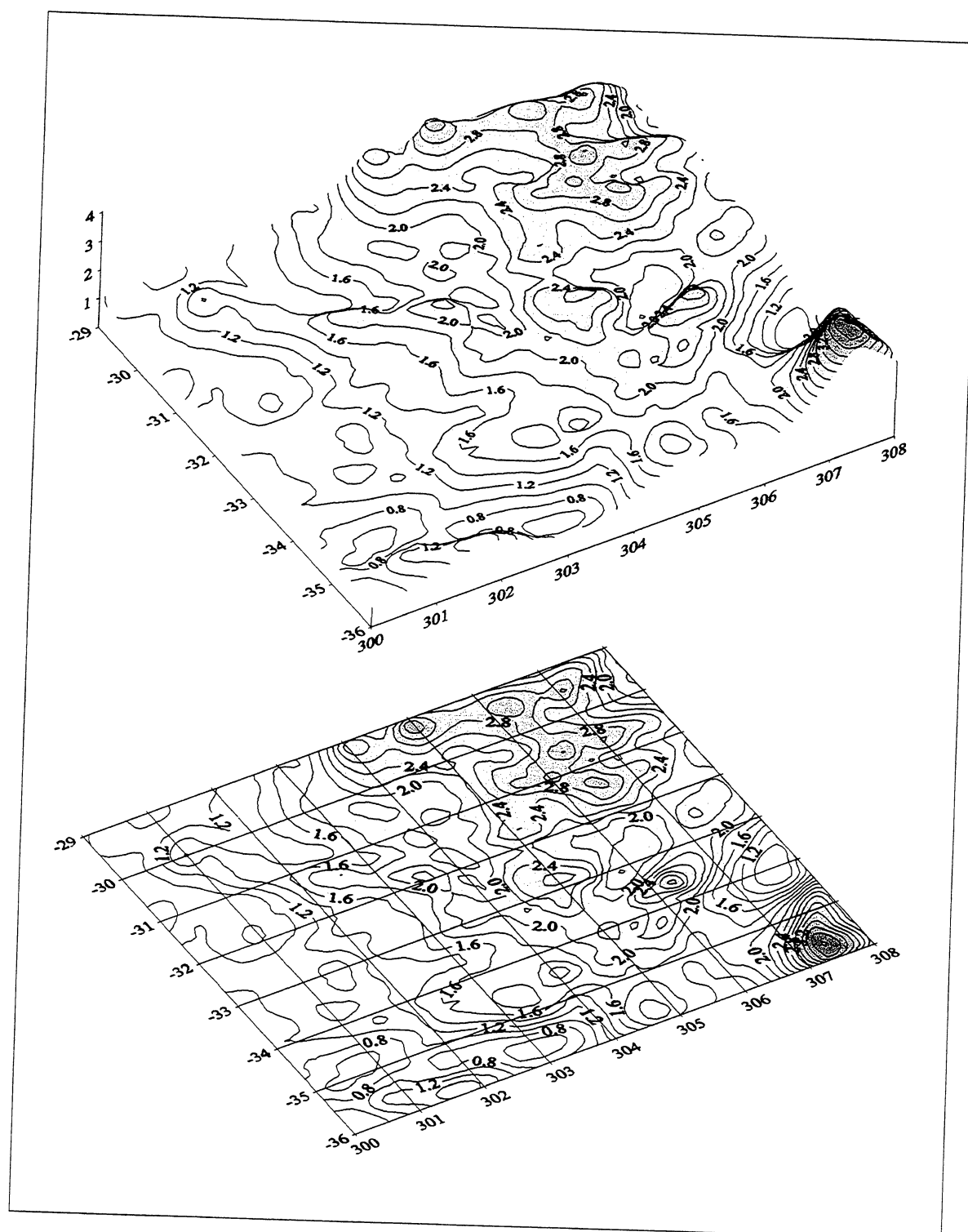


Figura 31. Malha de alturas geoidais residuais obtida com o programa *fftgeoid*, modelo 1 (EGM180) (intervalo de contorno: 0,2 m).

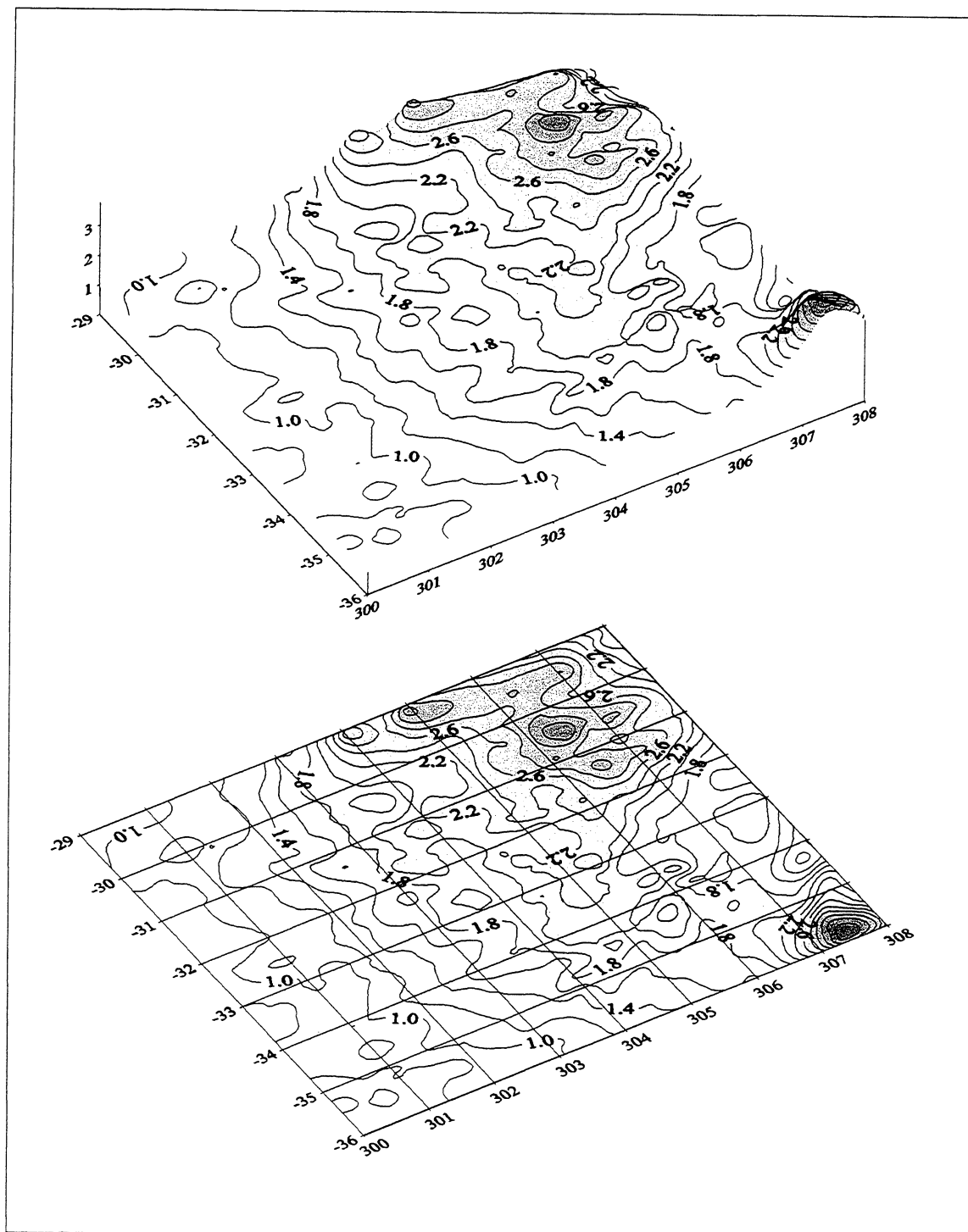


Figura 31a. Malha de alturas geoidais residuais obtida com o program *fftgeoid*, modelo 2 (EGM360) (intervalo de contorno: 0,2 m).

Finalmente, a Figura 32 mostra a malha do efeito indireto calculada com o programa *ind*, expressando os valores em cm. Note-se a semelhança do efeito com a topografia. Devido a restrições de tamanho nos arquivos de entrada do programa, o efeito indireto foi calculado em dois arquivos complementares, com 4° de espaçamento na longitude em cada um deles. O espaçamento do arquivo final foi de 0,016667° (1') em cada eixo, sendo os efeitos de terreno considerados até a terceira ordem e a uma distância de 35 km da estação de cálculo. Esta malha combinada às de alturas geoidais calculadas (do modelo EGM180, EGM360 e das anomalias residuais), fornecem as malhas de alturas geoidais finais dos modelos geoidais 1 (EGM180) e 2 (EGM360), apresentados nas Figura 33 e 33a e Tabelas 11 e 11a. Os resultados obtidos para a área de Uruguai, foram grandezas sub-centimétricas, semelhantes às obtidas na planície de Buenos Aires (Unsandivaras *et al.*, 1999), porém fora desta área, os valores são significativos, como mostram as Tabelas mencionadas.

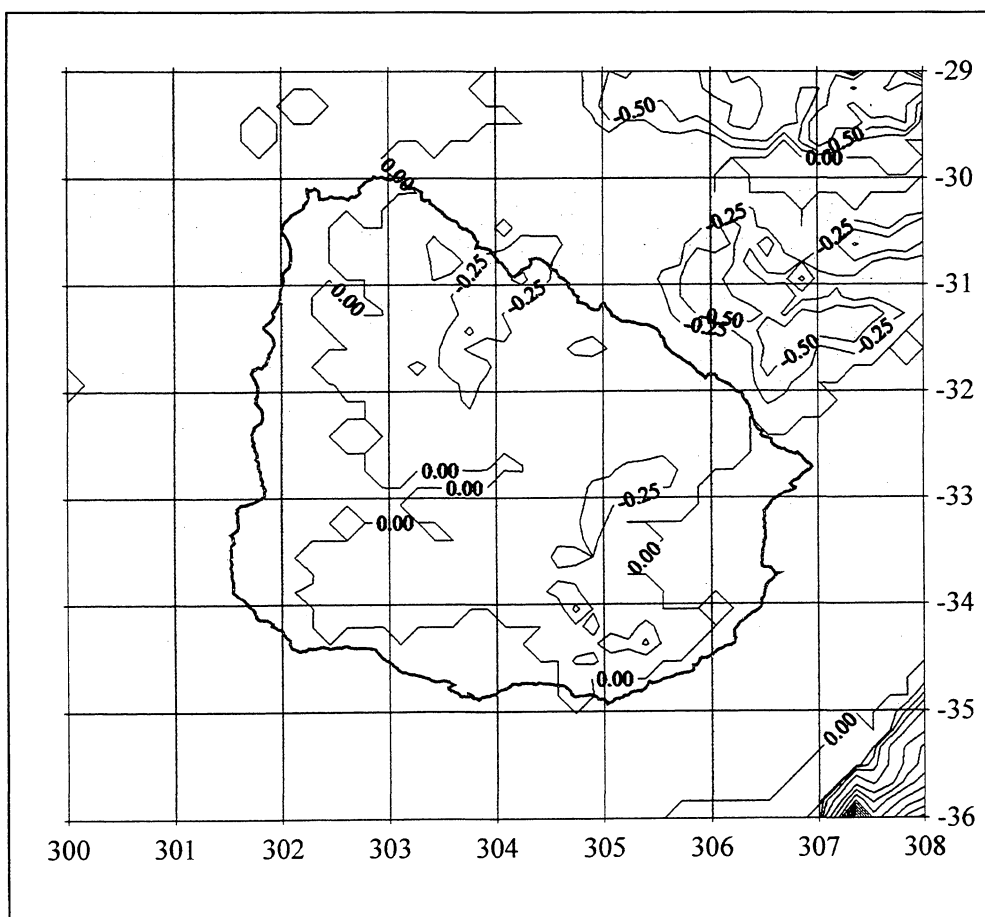


Figura 32. Efeito indireto do método de condensação de Helmert
(intervalo de contorno: 0,25 cm).

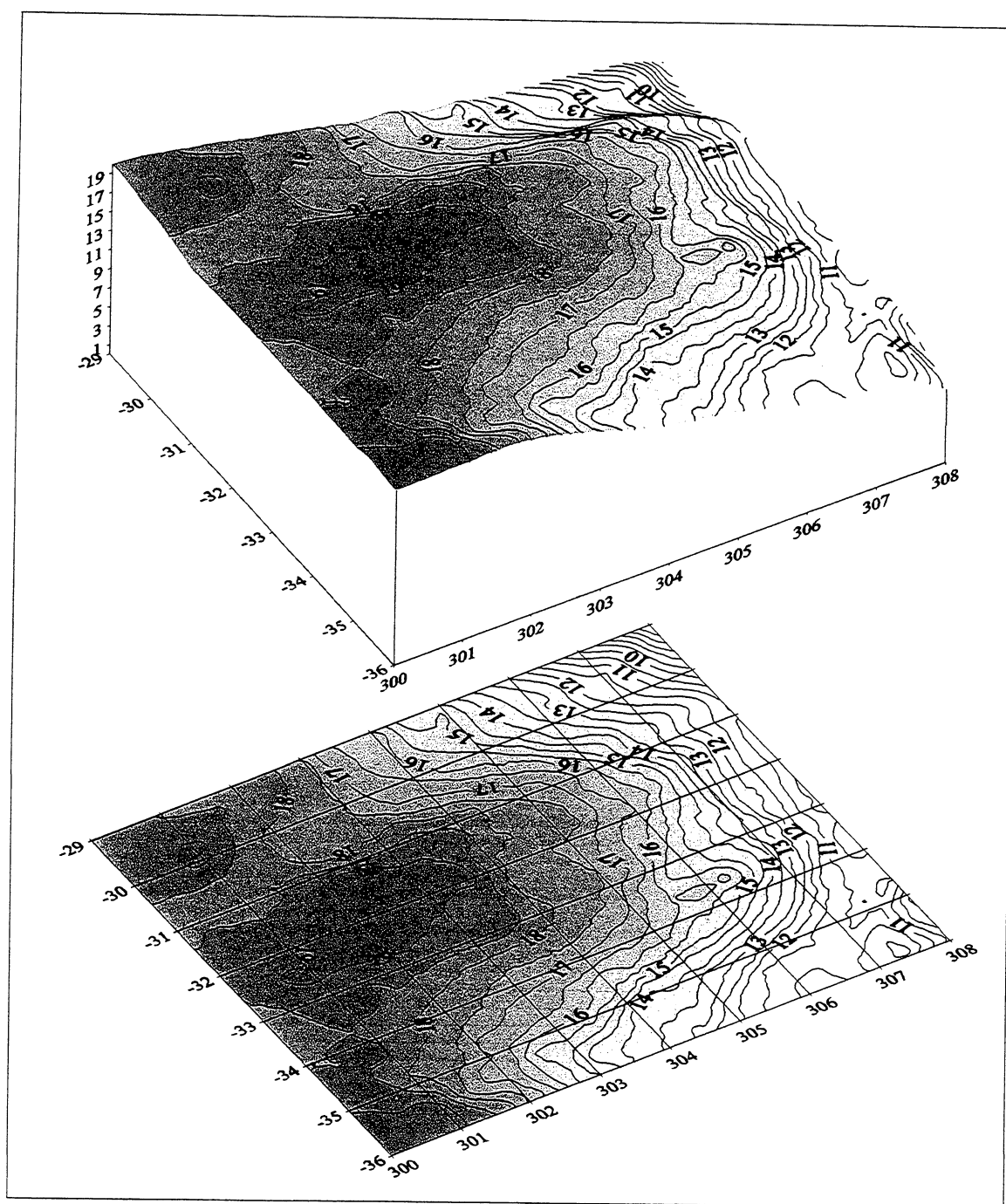


Figura 33. Alturas geoidais do modelo 1 (EGM180) (intervalo de contorno: 0,5 m).

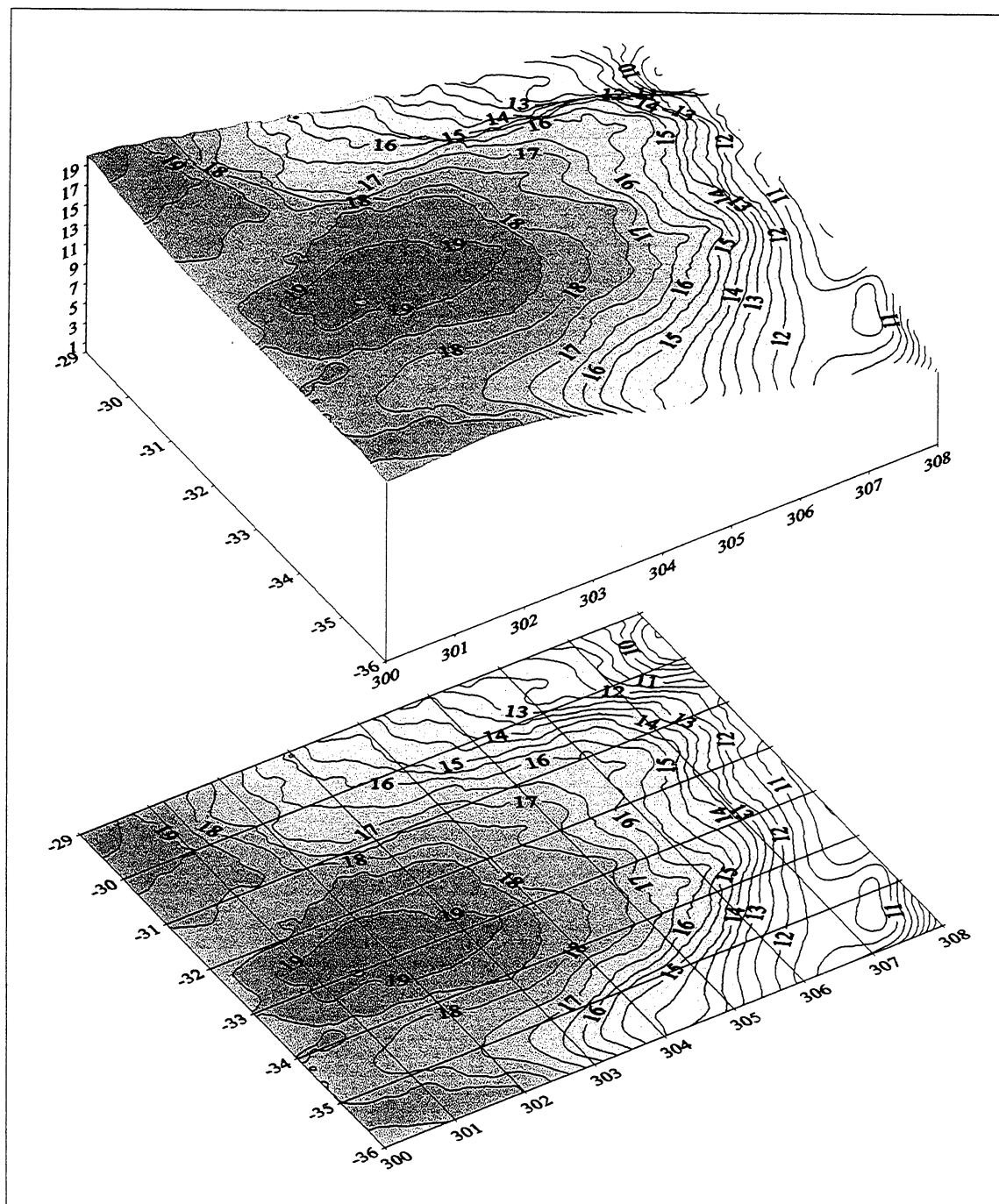


Figura 33a. Alturas geoidais do modelo 2 (EGM360) (intervalo de contorno: 0,5 m).

Tabela 11. Estatísticas das alturas geoidais finais (em m) do modelo 1 (EGM180).

Parâmetro/ Estatística	Latitude (°)	Longitude (°)	Altitude (m)	Altura residual	Altura EGM96	Efeito indireto	Altura geoidal
Máximo	-29	308	692,9	4,03	18,89	0,4	19,89
Mínimo	-36	300	-37,5	0,43	5,09	-22,8	7,68
Média	-34,07	304,7	35,5	1,76	14,27	-0,15	16,02
Desv. Pad.	-	-	75,7	0,64	3,15	0,74	2,75
Variação	7	8	730,4	3,60	13,80	23,20	12,21

Tabela 11a. Estatísticas das alturas geoidais finais (em m) do modelo 2 (EGM360).

Parâmetro/ Estatística	Latitude (°)	Longitude (°)	Altitude (m)	Altura residual	Altura EGM96	Efeito indireto	Altura geoidal
Máximo	-29	308	692,9	3,73	18,98	0,40	18,89
Mínimo	-36	300	-37,5	0,63	4,81	-22,8	7,33
Média	-34,07	304,7	35,5	1,74	14,28	-0,15	16,02
Desv. Pad.	-	-	75,7	0,63	3,14	0,74	2,74
Variação	7	8	730,4	3,10	14,17	23,20	11,56

5.2 MODELO GEOIDAL BASEADO NO GPM98CR

Nesta seção serão apresentados os resultados do modelo 4, baseado no modelo geopotencial GPM98CR, completo até 540 graus (Figura 23 do Capítulo 4). As contribuições do modelo geopotencial, no processo de decomposição mostram-se nas Figuras 34 e 35.

As anomalias ar-livre, apresentam neste modelo, um maior detalhe nos contornos de isoanômalas do que o EGM96.

Usando o arquivo de anomalias ar-livre observadas (Figura 27), o arquivo do cálculo do efeito direto de terreno, (Figura 28) e o arquivo de anomalias do modelo geopotencial (Figura 35), foi calculado o arquivo de anomalias residuais, apresentado na Figura 36, cujas estatísticas incluem-se na Tabela 12.

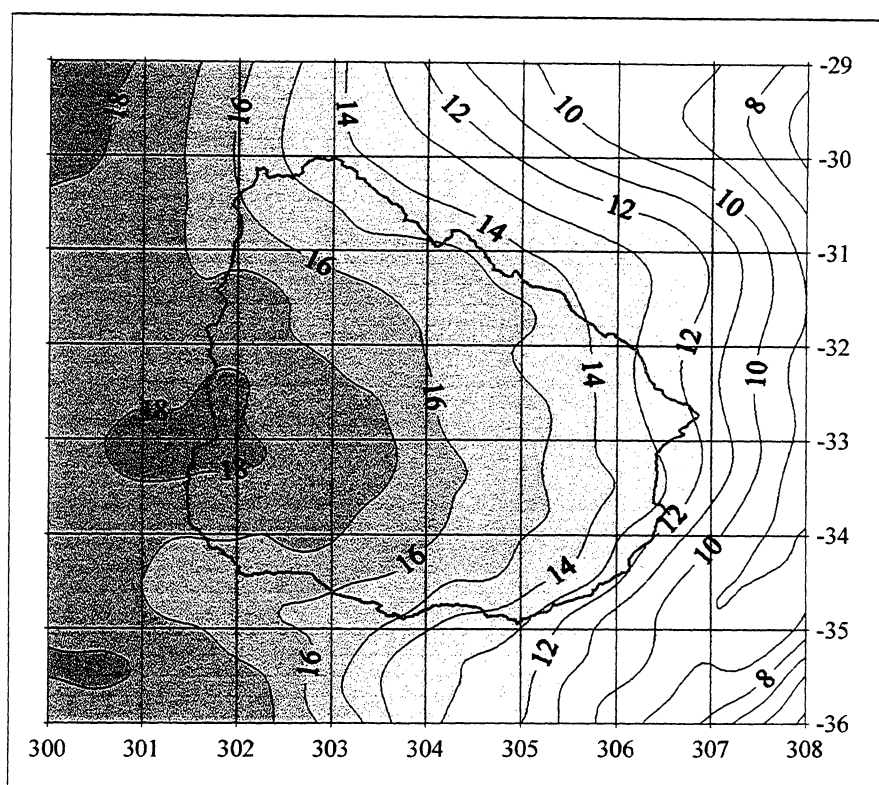


Figura 34. Alturas geoidais geradas pelo modelo geopotencial GPM98CR (540)
(intervalo de contorno: 1 m).

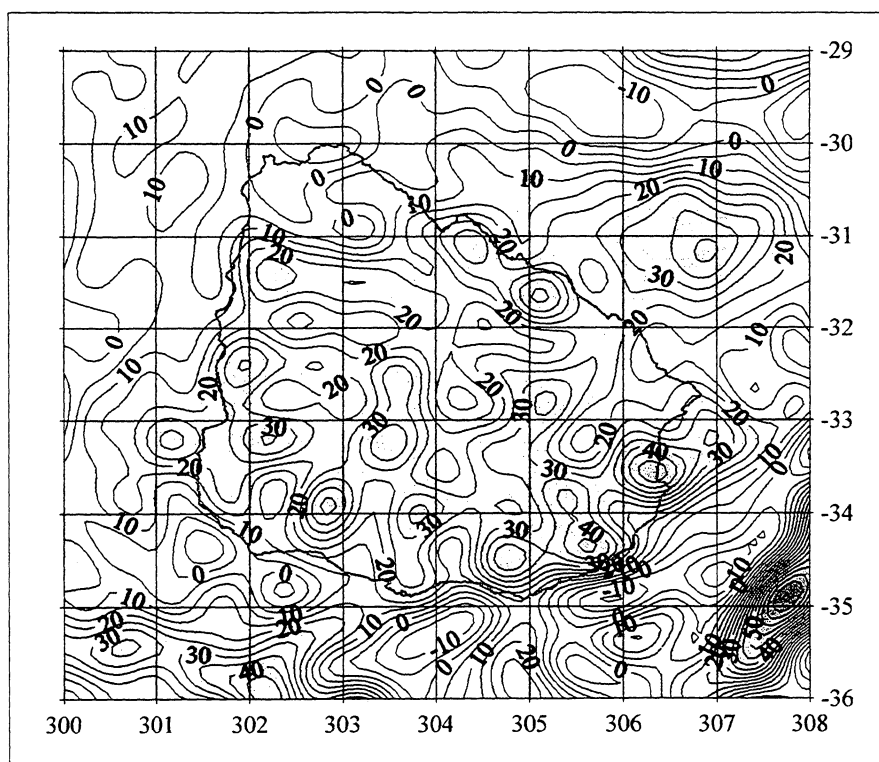


Figura 35. Anomalias gravimétricas ar-livre do modelo geopotencial GPM98CR (540)
(intervalo de contorno: 5 mGal).

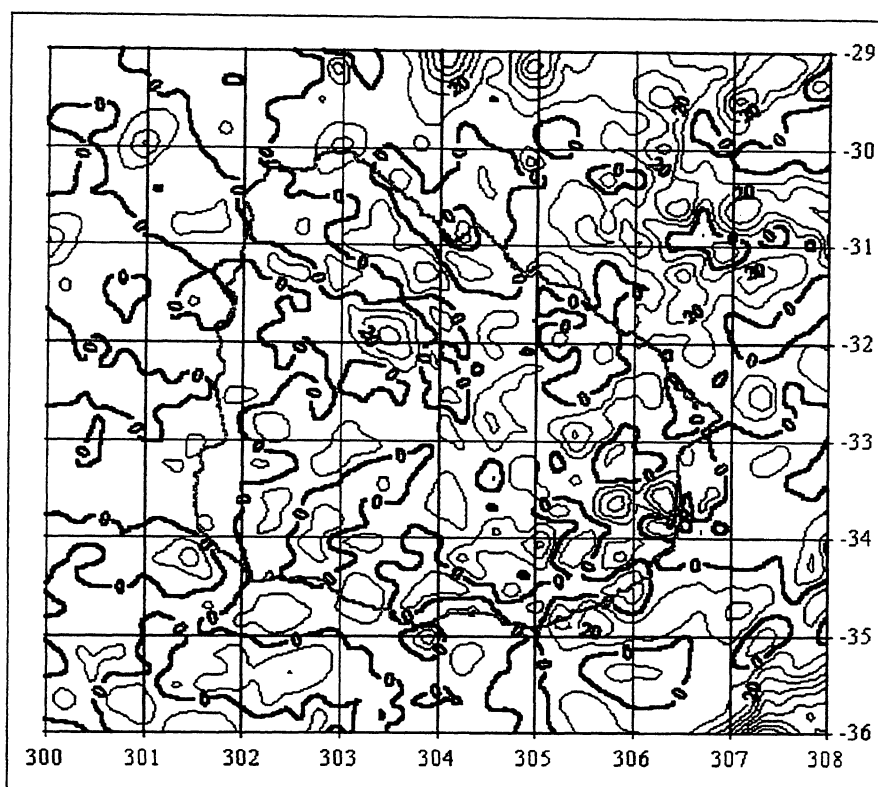


Figura 36. Anomalias gravimétricas residuais do modelo 4 (GPM540), após o processo de decomposição (intervalo de contorno 10: mGal).

Tabela 12. Estatísticas das anomalias residuais (em mGal) do modelo 4 (GPM540).

15860 estações	Latitude (°)	Longitude (°)	Altitude (m)	Anomalia ar-livre	Efeito terreno	Anomalia GPM98CR	Anomalia residual
Máximo	-29	308	692,9	100,639	103,080	76,16	108,916
Mínimo	-36	300	-37,5	-35,788	0	-19,64	-56,634
Média	-34,07	304,7	35,5	13,318	3,764	13,433	3,330
Desv. Pad.	-	-	75,7	16,247	9,483	15,562	13,370
Variação	7	8	730,4	136,427	103,080	95,80	165,550

A Figura 37 mostra as alturas geoidais residuais calculadas com *fftgeoid*, usando a transformada unidimensional de Fourier sobre as anomalias residuais mencionadas e uma representação da superfície gerada.

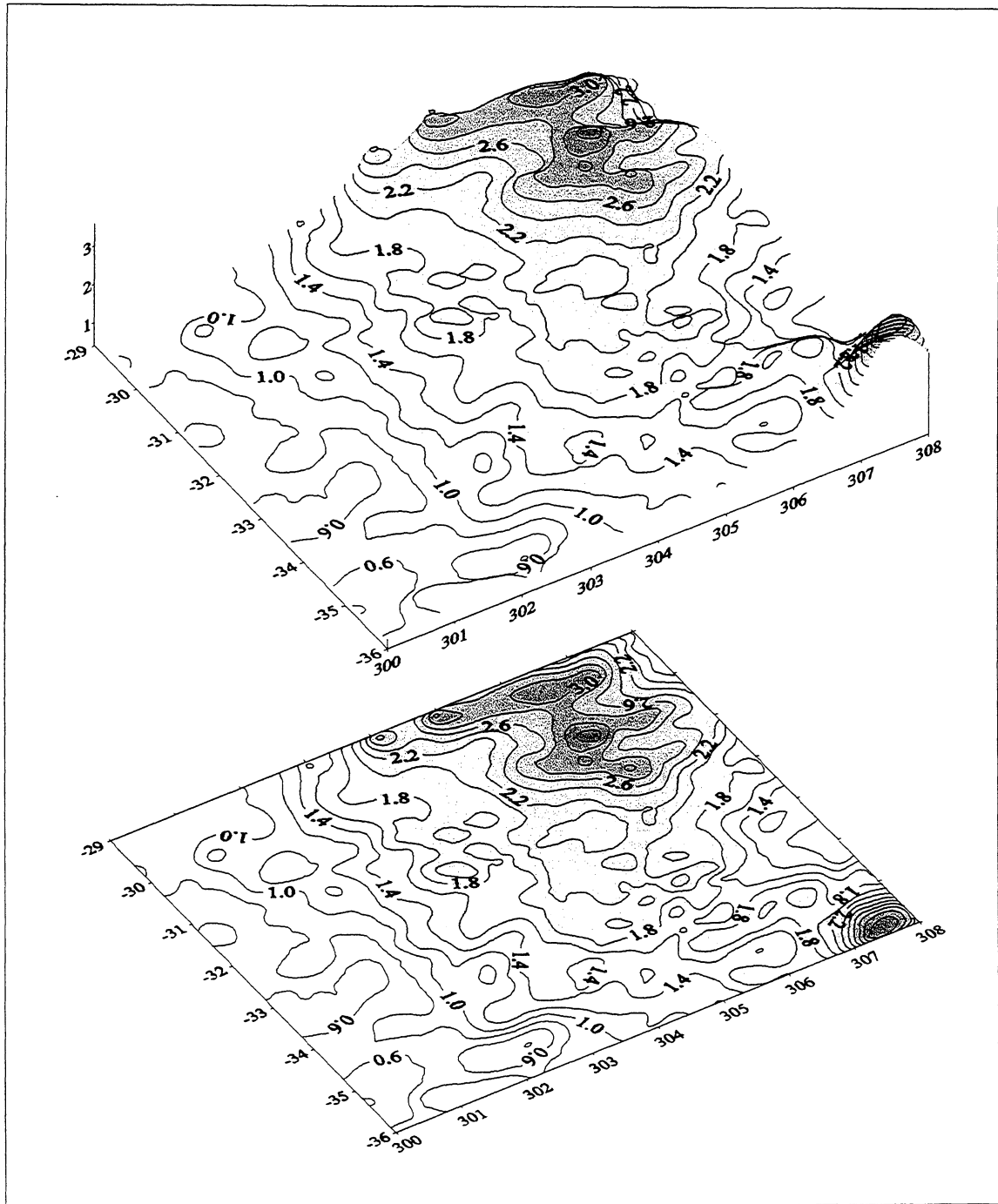


Figura 37. Alturas geoidais residuais do modelo 4 (GPM540)
(intervalo de contorno: 0,2 m).

Finalmente, combinando os arquivos das alturas geoidais do modelo geopotencial (Figura 34), das alturas geoidais residuais (Figura 37) e do efeito indireto (Figura 31), obteve-se a malha de alturas geoidais finais do modelo geoidal 4 (GPM540), com a sua correspondente superfície, mostrada na Figura 38 e suas estatísticas na Tabela 13.

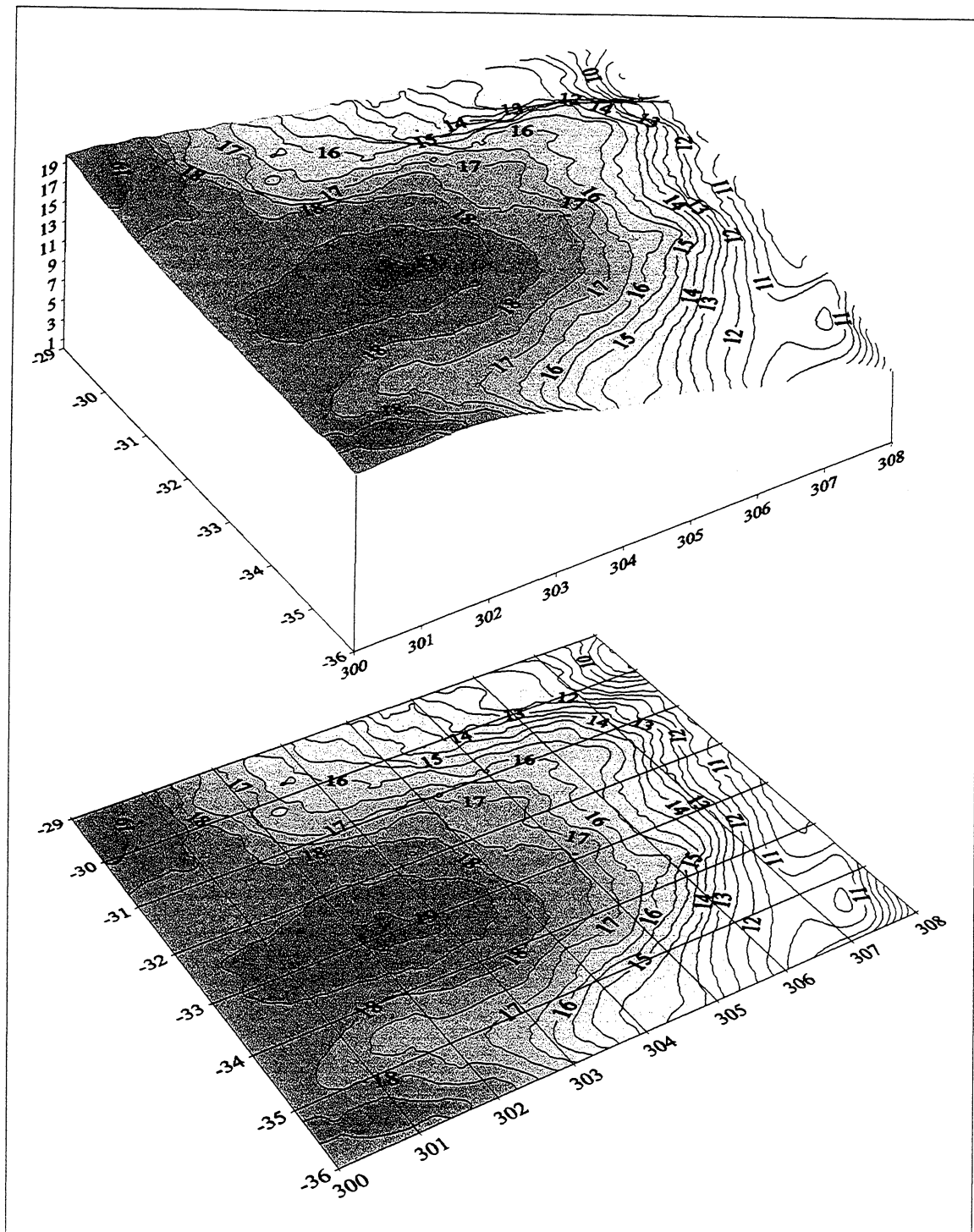


Figura 38. Alturas geoidais do modelo 4 (GPM540) (intervalo de contorno: 0,5 m).

Tabela 13. Estatísticas das alturas geoidais finais (em m), do modelo 4 (GPM540).

Parâmetro/ Estatística	Latitude (°)	Longitude (°)	Altitude (m)	Altura residual	Altura GPM98CR	Efeito indireto	Altura geoidal
Máximo	-29	308	692,9	3,57	18,90	0,4	19,76
Mínimo	-36	300	-37,5	0,40	4,84	-22,8	7,37
Média	-34,07	304,7	35,5	1,58	14,25	-0,15	15,82
Desv. Pad.	-	-	75,7	0,67	3,15	0,74	2,72
Variação	7	8	730,4	3,17	14,06	23,2	12,39

A Tabela 14 mostra as diferenças máximas, geradas com o uso de diferentes modelos geopotenciais, nas anomalias gravimétricas ar-livre e residuais e nas alturas geoidais residuais e finais de cada um dos modelos geoidais gerados (as diferenças, são obtidas da subtração valor máximo – valor de cada coluna).

Tabela 14. Diferenças entre diversos parâmetros dos modelos geoidais calculados.

Parâmetro ↓	Estatística →	Máximo	Mínimo	Média	Dês. Pad.	Variação
Anomalia ar-livre do mod. geopot. (mGal)	EGM96 (180)	36,914	-15,667	13,039	9,600	52,581
	EGM96 (360)	51,066	-27,664	13,062	13,901	78,730
	GPM98CR (540)	76,160	-19,640	13,433	15,562	95,800
	Diferença	39,246	11,997	0,394	-	43,219
Altura geoidal residual de cada modelo (m)	1 (EGM180)	4,03	0,43	1,76	0,64	3,60
	2 (EGM360)	3,73	0,63	1,74	0,63	3,10
	4 (GPM540)	3,57	0,40	1,58	0,67	3,17
	Diferença	0,46	0,23	0,18	-	0,5
Altura geoidal do modelo geopotencial (m)	EGM96 (180)	18,91	5,10	13,13	3,32	13,81
	EGM96 (360)	18,98	4,81	14,28	3,14	14,17
	GPM98CR (540)	18,90	4,84	14,25	3,15	14,06
	Diferença	0,08	0,09	1,15	-	0,36
Altura geoidal final (m)	1 (EGM180)	19,89	7,68	16,02	2,75	12,21
	2 (EGM360)	19,89	7,50	16,02	2,74	12,39
	4 (GPM540)	19,76	7,37	15,82	2,72	12,39
	Diferença	0,13	0,31	0,2	-	0,18

5.3 OUTROS TESTES REALIZADOS

5.3.1 O efeito direto do relevo topográfico

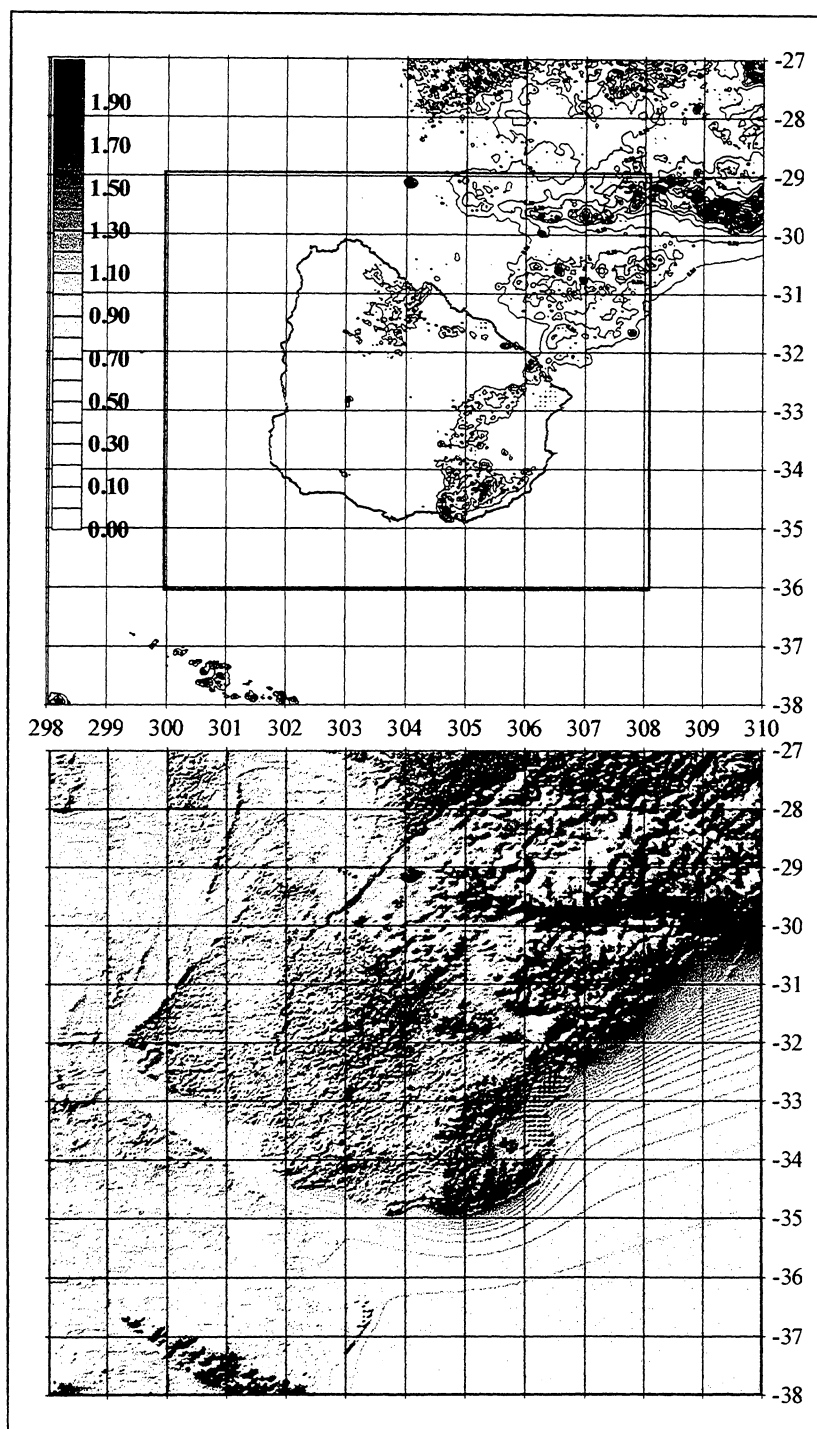


Figura 39. Efeito direto de terreno obtido com *tc2dfapl* (intervalo de contorno: 0,05 mGal).

Na parte superior da Figura 39, encontra-se o mapa do arquivo gerado e na inferior, uma imagem do mesmo, note-se a correlação do efeito com a topografia e a sua extensão no oceano.

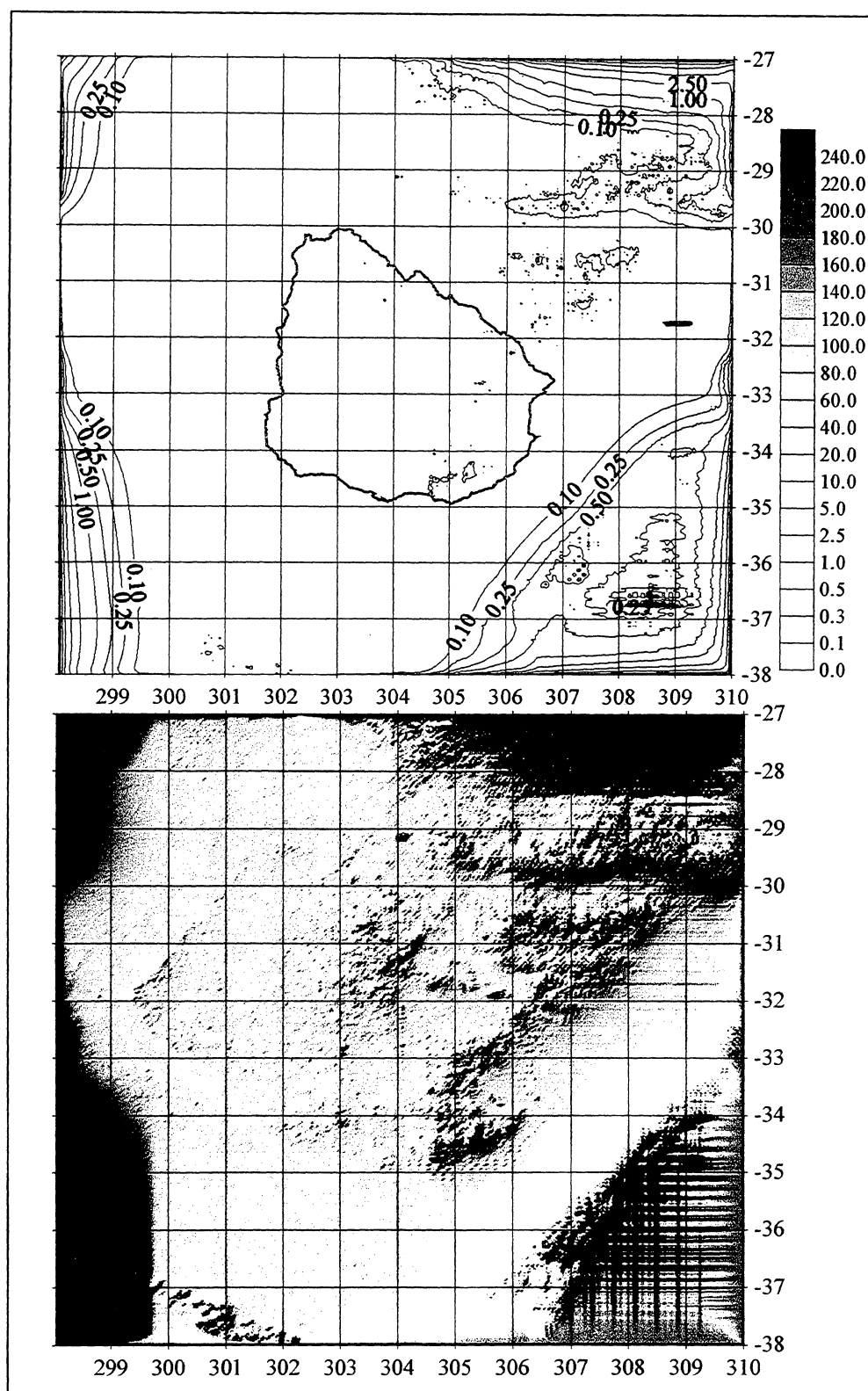


Figura 40. Efeito direto de terreno obtido com *tcfour*. Observe-se os valores obtidos nas bordas e o efeito na área oceânica (intervalo de contorno: 0,5 mGal).

5.3.2 Testes no núcleo da fórmula de Stokes

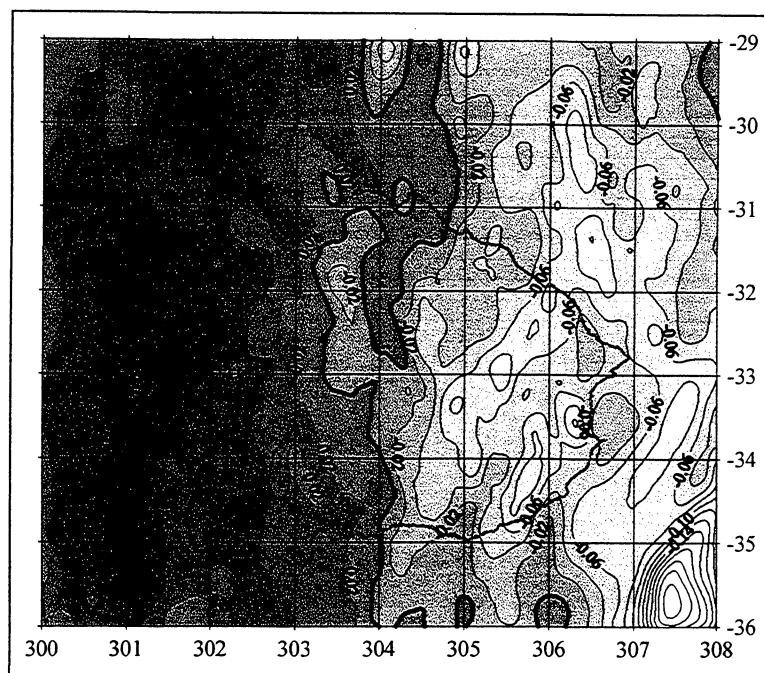


Figura 41. Diferenças entre alturas geoidais residuais, obtidas com a fórmula de Stokes com núcleo esférico original (1DFFT) e aproximação plana com anomalias médias de gravidade (opções 5 e 1 de *fftgeoid*) (Intervalo de contorno: 0,02 m).

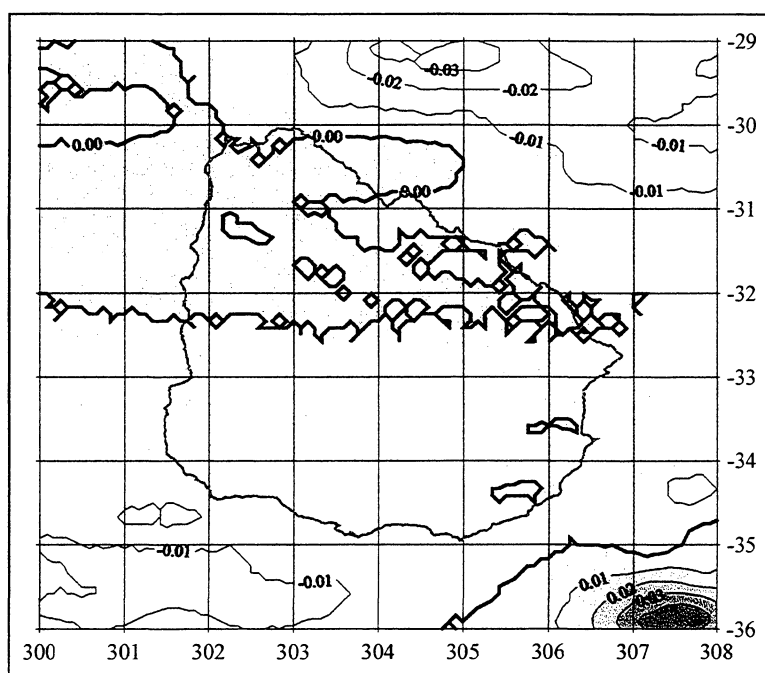


Figura 42. Diferenças entre alturas geoidais residuais, obtidas com a fórmula de Stokes com núcleo esférico original (1DFFT) e núcleo esférico modificado (2DFFT) (opções 5 e 4 de *fftgeoid*) (Intervalo de contorno: 0,01 m).

5.3.3 Espaçamento de quadriculas de 10'x 10'

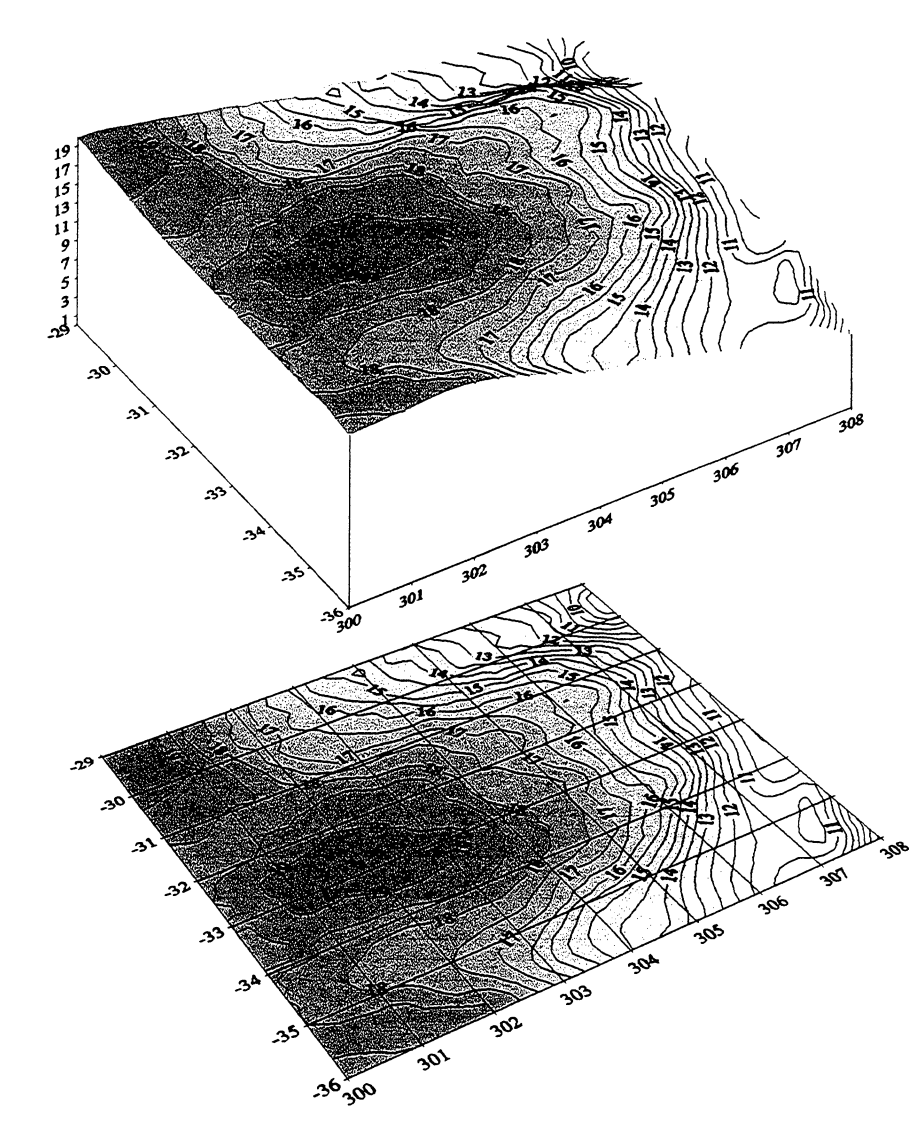


Figura 43. Alturas geoidais obtidas a partir de malhas com espaçamento de 10' x 10' modelo 3 (EGM96b) (intervalo de contorno: 0,5 m).

5.3.4 Modelo com anomalia ar-livre, calculada a partir da anomalia Bouguer

Nesta seção, são apresentadas em primeiro lugar, as diferenças obtidas nas anomalias gravimétricas ar-livre, nas alturas geoidais residuais e nas alturas geoidais finais, entre o modelo 4 (GPM540) e este modelo 5 (GPM540b) e logo após, os resultados do modelo 5. O modelo 4, foi tomado como representativo dos modelos que usaram a anomalia ar-livre diretamente calculada. A Tabela 15, resume as principais diferenças achadas, sendo que as diferenças foram obtidas da subtração modelo 4 (GPM98) - modelo 5 (GPM98b).

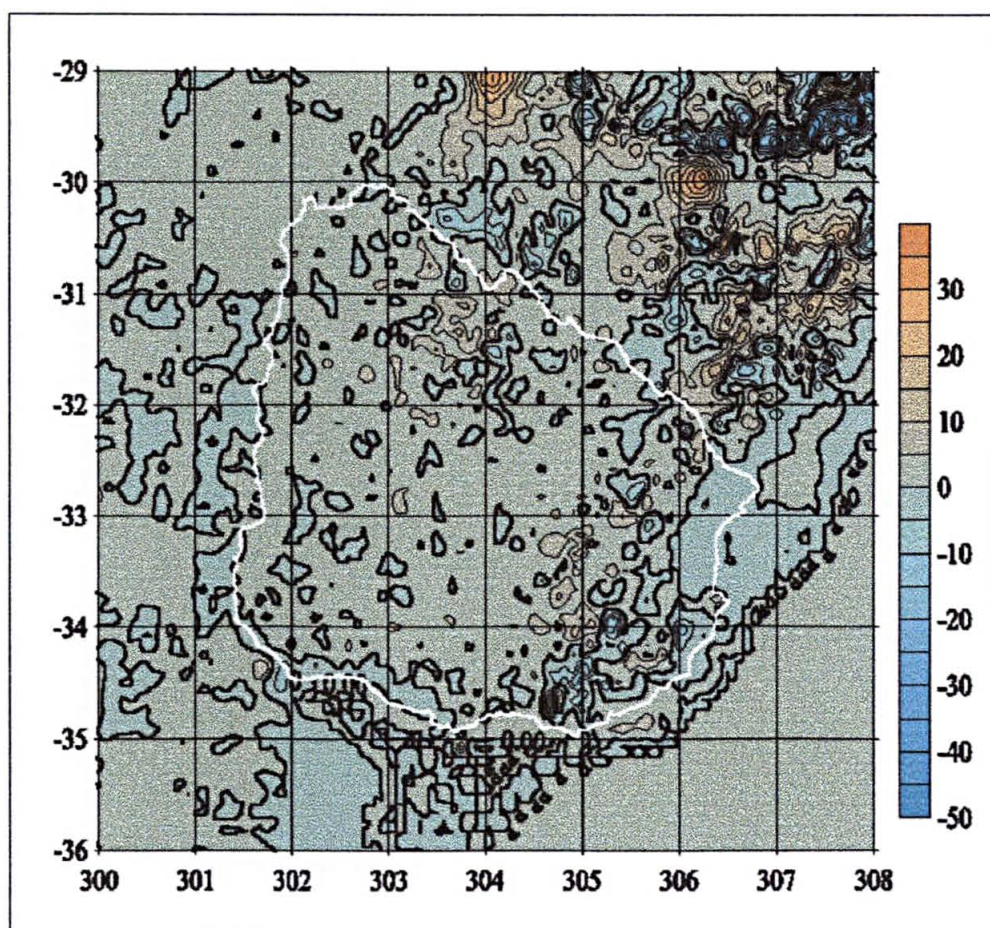


Figura 44 Diferenças nas anomalias ar-livre entre o modelo 4 (GPM540) e o modelo 5 (GPM540b) (intervalo de contorno: 5 mGal).

Tabela 15. Diferenças entre o modelo 4 (GPM540) e o modelo 5 (GPM540b) (valores obtidos da subtração modelo 4 (GPM540) – modelo 5 (GPM540b)).

Parâmetro ↓	Estatística →	Máximo	Mínimo	Média	Desvio Padrão
Anomalias ar-livre	(mGal)	35,307	-48,345	0,977	4,307
Altura geoidal residual	(m)	1,153	-0,425	0,369	0,236
Altura geoidal final	(m)	1,477	-0,555	0,342	0,232

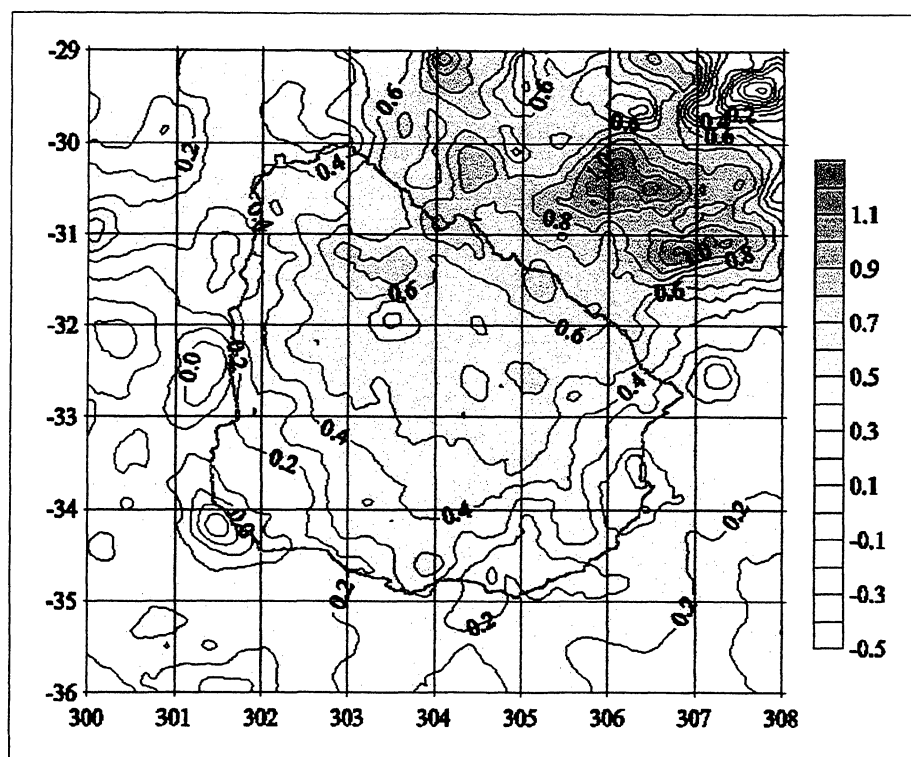


Figura 45. Diferenças nas alturas geoidais residuais, entre o modelo 4 (GPM540) e o modelo 5 (GPM540b) (intervalo de contorno: 0,1 m).

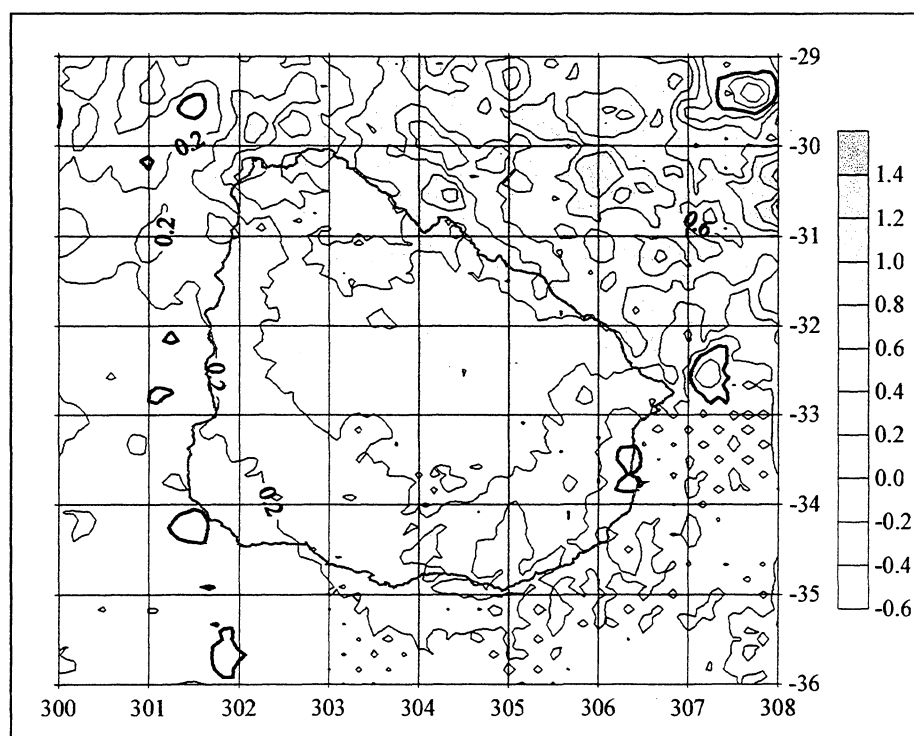


Figura 46. Diferenças nas alturas geoidais finais, entre o modelo 4 (GPM540) e o modelo 5 (GPM540b) (intervalo de contorno: 0,2 m).

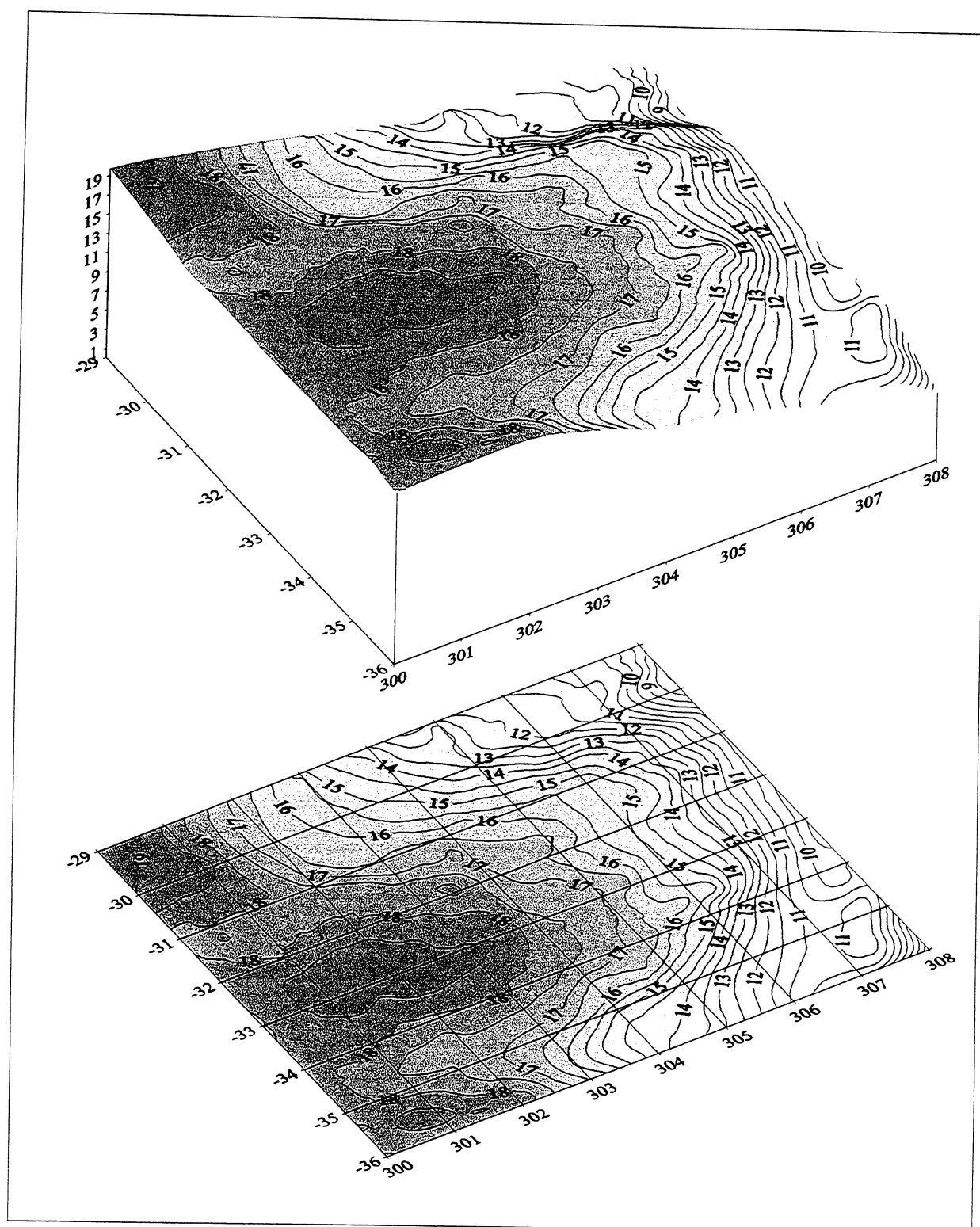


Figura 47. Alturas geoidais do modelo 5 (GPM540b), obtido usando anomalias ar-livre a partir das correspondentes Bouguer (intervalo de contorno 0,5m).

5.3.5 Modelo com anomalia ar-livre calculada a partir da anomalia Bouguer, considerando o efeito indireto do terreno na gravidade.

O modelo geopotencial empregado foi o GPM98CR, completo até o grau 540. A Tabela 16, mostra as estatísticas do efeito direto de terreno simples, do mesmo efeito somado ao efeito indireto na gravidade e na última linha, as diferenças entre os dois efeitos, em diferentes pontos das malhas. A combinação de efeitos foi usada no modelo 6 (GPM540c), enquanto o efeito direto¹⁸, foi o utilizado no cálculo dos modelos 1 a 5.

Tabela 16. Estatísticas e diferenças dos efeitos direto e indireto na gravidade, malhas com espaçamento regular de 5' x 5' (valores em mGal).

Parâmetro ↓ Estatística →	Máximo	Mínimo	Média	Desvio Padrão
Efeito direto	97,837	0	3,764	9,483
Efeito direto + efeito indireto	95,115	-4,781	1,975	5,680
Diferença entre efeitos	8,423	1,937	0,979	1,502

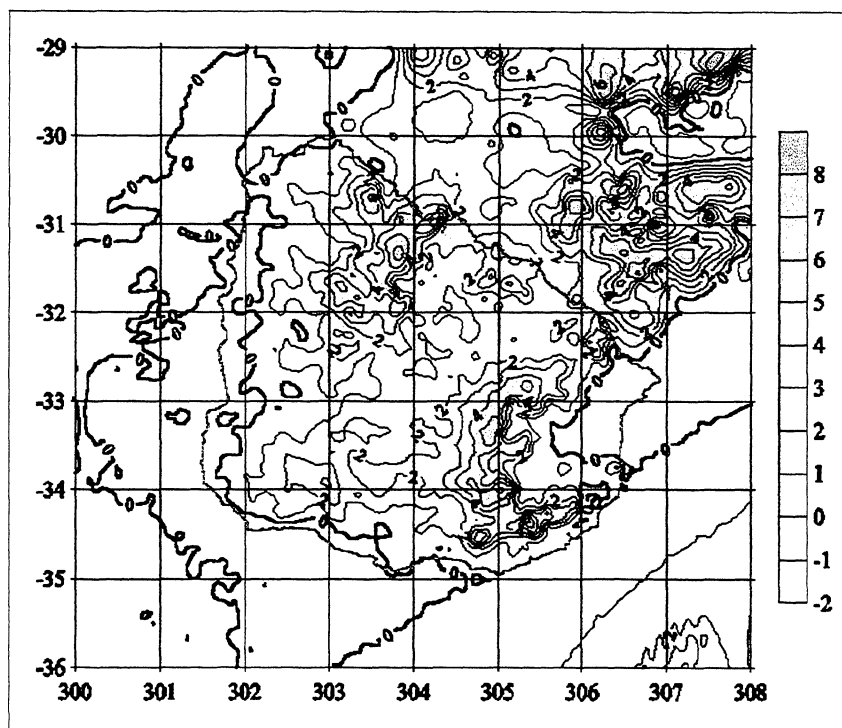


Figura 48. Diferenças entre o efeito de terreno simples e considerando o efeito indireto na gravidade (intervalo de contorno: 1 mGal).

¹⁸ A diferença com anteriores valores, deve-se ao processo de interpolação usado neste caso.

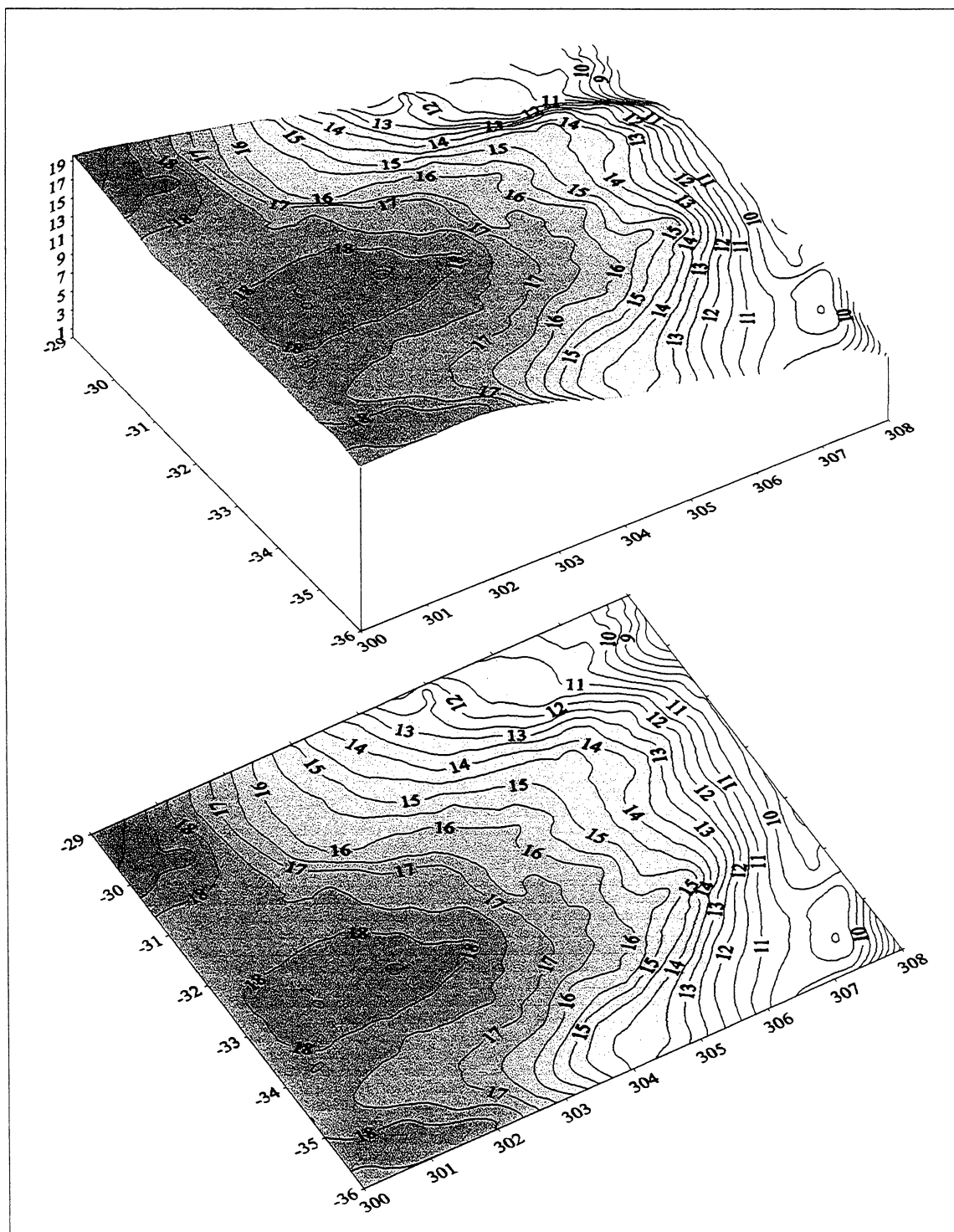


Figura 49. Altura geoidal do modelo 6 (GPM540c) (intervalo de contorno: 0,5 m).

5.3.6 Modelo Final

A Figura 50 mostra as alturas geoidais finais obtidas.

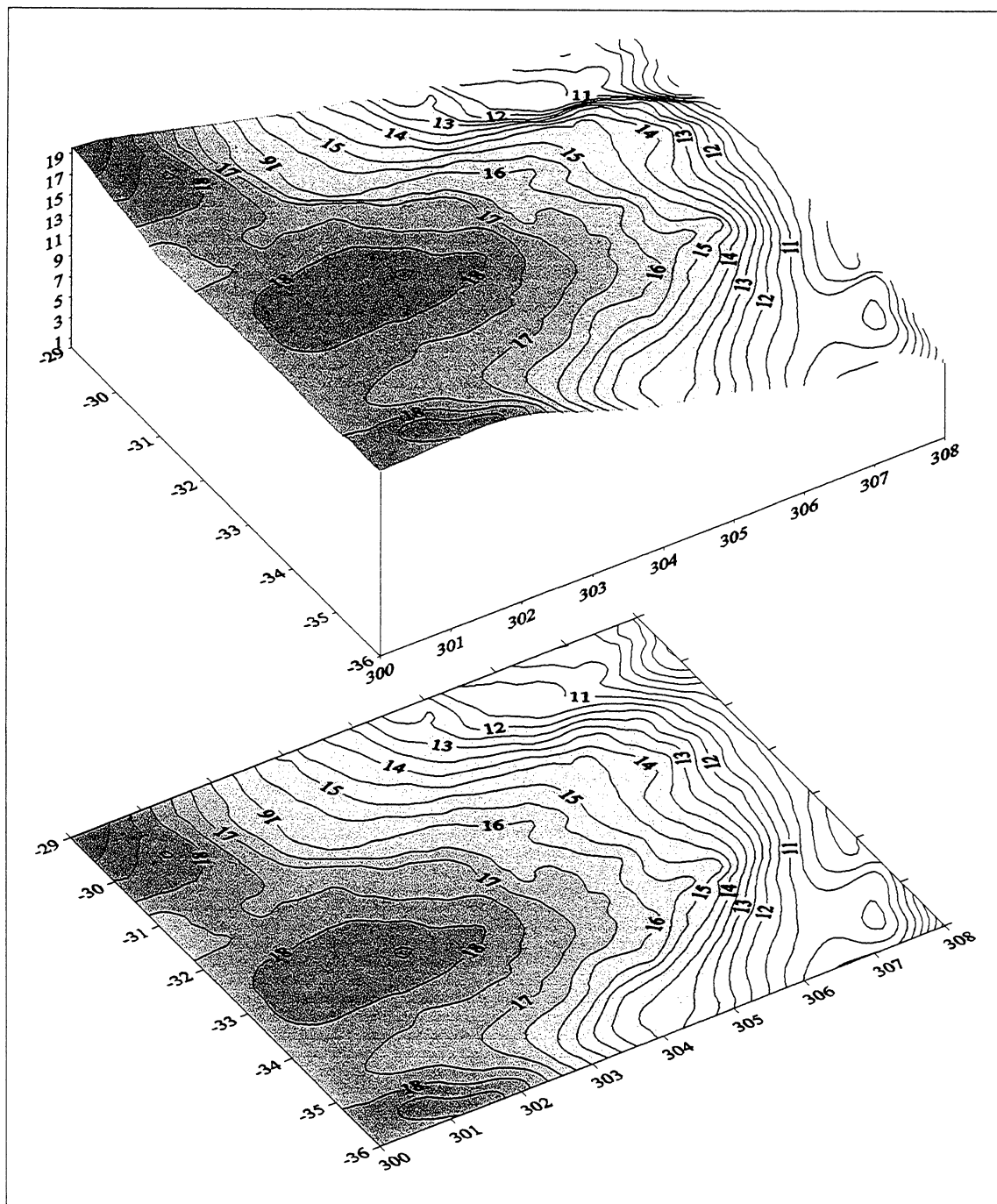


Figura 50. Alturas geoidais do modelo 7 (Final) (intervalo de contorno 0,5 m).

5.4 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

5.4.1 Referentes ao cálculo dos modelos geoidais iniciais

- Modelos geopotenciais

As alturas geoidais, fornecidas pelos modelos geopotenciais, apresentaram pequenas diferenças, sendo que as do modelo 1 (EGM180), tem uma média inferior em 1 m, em relação aos outros dois modelos. Nestes cálculos, as alturas geoidais para o Uruguai possuem uma variação entre 12 e 18 m.

As anomalias gravimétricas ar-livre para os modelos 2 (EGM360) e 4 (GPM540), mostram para o Uruguai, valores de -10 a $+50$ mGal, e de 0 a 40 mGal para o EGM180. As principais feições gravimétricas estão bem representadas, quando comparadas com as anomalias calculadas a partir do BDG.

- Efeitos do relevo topográfico

A correção do relevo topográfico apresentou para o Uruguai, valores de entre 0 e 5 mGal, sendo que o efeito indireto nas alturas geoidais finais, foi de grandeza desprezível para este trabalho.

- Processo de decomposição da altura geoidal

Neste processo, as anomalias no Uruguai ficaram com valores de -10 a $+10$ mGal, sendo que os modelos baseados no EGM96 tiveram uma média de 4 mGal e para o GPM98CR de 3 mGal. A principal anomalia gravimétrica no Uruguai, localizada na zona sudeste do país, não foi eliminada pelo efeito do relevo, já que essa área apresenta altitudes próximas do nível médio do mar.

- Alturas geoidais residuais

Resultaram em valores semelhantes para todos os modelos, com diferenças, inferiores a $0,2$ m.

- Alturas geoidais finais

Os modelos baseados no EGM96, tiveram resultados muito próximos e a mesma média estatística. O modelo baseado no GPM98CR, teve um comportamento semelhante aos anteriores, com média inferior em relação a eles, de $0,2$ m. Embora as anomalias gravimétricas e alturas geoidais calculadas dos modelos geopotenciais, tenham sido

diferentes, os três modelos calculados apresentaram pouca diferença final nos seus resultados.

5.4.2 Testes complementares

Os programas *tcfour* e *tc2dftpl*, mostraram-se inadequados para o cálculo do efeito direto do relevo, pelos considerados expostos no Capítulo 4. Especificamente o programa *tc2dftpl*, nos casos de cálculos em áreas simplesmente terrestres, tem sido intensamente usado com bons resultados [Li e Sideris, 1994].

O teste das diferentes aproximações para o núcleo da fórmula de Stokes, aportou interessantes experiências. Na Figura 41, nota-se com clareza a diferença entre uma aproximação plana e uma esférica rigorosa. A partir de uma linha central norte-sul de 0 m de diferença, os valores crescem para o oeste até alcançar valores próximos de 0,07 m e também para o leste com valores semelhantes, sendo o máximo de 0,20 m no extremo sudeste. Para Uruguai, os valores ficam entre $\pm 0,06$ m, assim para precisões decimétricas nas alturas geoidais finais, mesmo para o de áreas pequenas, deve ser usada a aproximação esférica rigorosa. Na Figura 42, são comparadas as duas aproximações esféricas no núcleo da integral de Stokes, a rigorosa (1DFFT) e a bidimensional (2DFFT). Neste caso, o padrão simétrico é a partir de uma linha central leste-oeste, com valores pequenos de $\pm 0,03$ m, os quais podem ser desprezados para os fins deste trabalho. Como conclusão deste teste, pode-se estabelecer que qualquer uma das aproximações esféricas do núcleo da integral de Stokes, poderia ter sido usada neste trabalho.

O uso de espaçamento de 10', resultou num modelo sem diferenças significativas nos resultados finais, como será mostrado no Capítulo 6 de avaliação. Deduz-se que, para a área de aplicação dos modelos (Uruguai), o espaçamento escolhido inicialmente de 5', foi adequado.

Referente ao uso de anomalias gravimétricas ar-livre, obtidas a partir das anomalias Bouguer e o MTD: esta aproximação tem sido usada, quando se deseja evitar o erro sistemático, cometido pelo fato de que, as estações gravimétricas encontram-se normalmente, sobre estradas ou vias de comunicação nas partes baixas da topografia local [Forsberg, 1997]. No caso das redes gravimétricas do Uruguai e da Argentina, não acontece esse fato, já que a

topografia é suave, com estradas principais ao longo das partes mais altas do relevo. Como exemplo, a denominada Rede Gravimétrica Fundamental do Uruguai (924 estações), está sobreposta à rede de Nivelamento de 1ª Ordem, que está implantada sobre as principais vias de comunicação e altitudes do país. As estações que compõem a rede complementar (mais de 1300) foram escolhidas dentro do critério de preencher as lacunas na informação gravimétrica, sem considerar a altitude, não acompanhando assim o critério das partes baixas do terreno, normal em áreas montanhosas. Com estas considerações, foi usado nos modelos iniciais, a anomalia gravimétrica ar-livre da BDG, com as fórmulas já explicitadas. As diferenças entre as duas aproximações são significativas, atingindo valores finais máximos, nas alturas geoidais de até 0,6 m no Uruguai. Porém, este teste mostrou que, ainda que diminuindo significativamente o erro sistemático vertical do modelo, para os dados de controle disponíveis, o uso da anomalia Bouguer não melhorou os resultados finais, pelo contrário. A diferença média entre este modelo e o modelo 4 (GPM540), tomado como representativo dos modelos anteriores, foi de 0,342 m.

No modelo 6, o teste mostrou que é importante considerar o efeito indireto na gravidade (eq. 46 do Capítulo 2). No Uruguai atinge valores próximos a 5 mGal, causando uma diminuição, no efeito direto e a aparição de pequenos valores negativos. Face às diferenças encontradas, seria de esperar que as alturas geoidais geradas a partir deste modelo, refletissem uma melhoria nos testes de avaliação, o que não aconteceu. Uma explicação primária, pode ser no sentido de que, a melhoria seria de uma grandeza menor à dos erros introduzidos na avaliação dos modelos geoidais, devido por exemplo, à insuficiente resolução dos dados ou precisão e distribuição dos dados de controle.

O último teste, que gerou o modelo 7 (Final), reuniu várias das opções aqui apresentadas, tentando quantificar o efeito combinado delas. Assim, este modelo foi calculado com o modelo EGM96, até 120 graus, usando anomalias ar-livre calculadas a partir das correspondentes Bouguer, considerando os efeitos direto e indireto do relevo na gravidade, com quadrículas de 10' x 10'. O resultado foi semelhante aos resultados dos modelos geoidais anteriores, sem melhoria de importância, o que reforça a explicação do item anterior e a conclusão primária de que uma melhoria nos resultados, deveria dar-se em decorrência de novos e melhores dados de trabalho.

CAPÍTULO 6 - AVALIAÇÃO DOS MODELOS GEOIDAIIS OBTIDOS

São apresentadas neste Capítulo, através de Tabelas e Figuras, as avaliações estatísticas realizadas nos modelos geoidais calculados, usando os dados de controle mostrados no Capítulo 3. A seção 1, contém as estatísticas da avaliação absoluta, a seção 2, as da avaliação relativa e a 3, oferece-se um resumo das avaliações e a seleção do modelo geoidal final, o qual é apresentado na Figura 61. Os modelos foram designados mediante a seguinte convenção:

Modelo 1 - EGM180

Modelo 2 - EGM360

Modelo 3 - EGM360b

Modelo 4 - GPM540

Modelo 5 - GPM540b

Modelo 6 - GPM540c

Modelo 7 - Final

A designação do nome do modelo, adicionado da letra minúscula *m*, indica que do modelo, foi subtraído o desvio sistemático na altura geoidal, mencionado no Capítulo 3, seção 4. Exemplo: EGM180m para o modelo 1 (EGM180).

6.1 AVALIAÇÃO ABSOLUTA

Os 41 dados de controle absolutos, foram divididos em dois arquivos, um para o Uruguai (22 registros) e o outro da Argentina (29 registros). Esta divisão, foi realizada em razão dos dois conjuntos de dados, estarem referidos a data verticais diferentes. Cada arquivo, junto com cada um dos modelos geoidais, foram processados pelo programa *ondula*, gerando as diferenças entre as alturas geoidais de cada modelo e as calculadas com os dados de controle.

As Tabelas desta avaliação incluem na primeira coluna, N^o de identificação e na sequência, duas colunas consecutivas para cada modelo gerado. Estas colunas, contém a diferença entre a altura obtida com GPS/RNs e a altura geoidal do modelo, sendo que, na primeira coluna acha-se a diferença simples e na segunda coluna, foi subtraída de cada valor da coluna anterior, a diferença média calculada de cada modelo (desvio ou erro sistemático). As últimas 5 linhas de cada Tabela, apresentam as estatísticas das diferenças obtidas, em termos de: média, valor máximo, valor mínimo, variação entre máximo e mínimo e desvio padrão da média, usando uma distribuição gaussiana nos resultados. Destacam-se com números em letra negrito, àqueles valores mais significativos das Tabelas.

As Tabelas 17, 17a. e a Figura 51, mostram os resultados do processamento para o Uruguai, enquanto a Tabela 18, 18a. e a Figura 52, referem-se aos dados argentinos. As Tabelas 17 e 18, pertencem aos dados dos modelos baseados no modelo geopotencial EGM96, enquanto as numeradas com a letra *a* (17a e 18a), correspondem a modelos baseados no GPM98CR.

Tabela 17. Diferenças entre a altura geoidal obtida com GPS e a dos modelos geoidais, 1, 2, 3 e 7 (baseados no EGM96), para os dados do Uruguai (alturas do geóide em m).

No.	Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3		Modelo 7	
	EGM180	EGM180m	EGM360	EGM360m	EGM360b	EGM360bm	Final	Final m
2	-2,02	-0,09	-2,14	-0,22	-2,07	-0,17	-0,44	0,61
4	-2,15	-0,22	-1,85	0,07	-1,81	0,09	-1,26	-0,21
6	-2,29	-0,36	-2,30	-0,37	-2,22	-0,32	-0,99	0,06
7	-1,57	0,36	-1,62	0,30	-1,54	0,36	-0,77	0,28
9	-1,89	0,04	-1,85	0,07	-1,85	0,05	-0,84	0,21
10	-2,43	-0,50	-2,38	-0,46	-2,30	-0,40	-1,03	0,02
12	-1,96	-0,03	-1,92	0,01	-1,99	-0,09	-1,27	-0,22
13	-1,56	0,37	-1,61	0,31	-1,53	0,37	-0,76	0,29
14	-1,88	0,05	-1,82	0,10	-1,82	0,08	-1,10	-0,05
15	-2,11	-0,18	-2,06	-0,14	-2,11	-0,21	-1,44	-0,39
16	-1,95	-0,02	-1,89	0,03	-1,88	0,02	-1,27	-0,22
17	-2,22	-0,29	-2,14	-0,21	-2,14	-0,24	-1,55	-0,50
18	-1,95	-0,02	-1,98	-0,06	-1,99	-0,09	-1,01	0,04
20	-2,34	-0,42	-2,26	-0,34	-2,26	-0,36	-1,66	-0,61
21	-1,80	0,13	-1,73	0,20	-1,73	0,17	-1,16	-0,11
22	-2,22	-0,29	-2,25	-0,33	-2,22	-0,32	-1,31	-0,26
23	-1,58	0,35	-1,63	0,29	-1,60	0,30	-0,79	0,26
24	-1,65	0,28	-1,71	0,21	-1,68	0,22	-0,85	0,20
25	-1,99	-0,06	-2,09	-0,17	-2,05	-0,15	-1,17	-0,12
26	-1,55	0,38	-1,68	0,24	-1,62	0,28	-0,71	0,34
27	-1,61	0,32	-1,64	0,28	-1,64	0,26	-0,79	0,26
28	-1,70	0,23	-1,74	0,18	-1,73	0,17	-0,91	0,14
MEDIA	-1,93	0,00	-1,92	0,00	-1,90	0,00	-1,05	0,00
MAX.	-1,55	0,38	-1,61	0,31	-1,53	0,37	-0,44	0,61
MIN	-2,43	-0,50	-2,38	-0,46	-2,30	-0,40	-1,66	-0,61
DESV.P.	0,28	0,28	0,25	0,25	0,25	0,25	0,30	0,30
	EGM180	EGM180m	EGM360	EGM360m	EGM360b	EGM360bm	Final	Final m

Tabela 17a. Diferenças entre a altura geoidal obtida com GPS e a dos modelos geoidais, 4, 5 e 6 (baseados no GPM98CR), para os dados do Uruguai (alturas do geóide em m).

No.	Modelo 4		Modelo 5		Modelo 6	
	GPM540	GPM540 m	GPM540b	GPM540b m	GPM540c	GPM540c m
2	-1,98	-0,25	-1,25	0,19	-0,52	0,53
4	-1,71	0,02	-1,72	-0,28	-1,28	-0,23
6	-2,09	-0,36	-1,58	-0,13	-1,00	0,05
7	-1,46	0,27	-1,15	0,29	-0,80	0,25
9	-1,62	0,11	-1,29	0,15	-0,84	0,21
10	-2,18	-0,45	-1,70	-0,26	-1,01	0,04
12	-1,68	0,05	-1,53	-0,08	-1,25	-0,20
13	-1,45	0,28	-1,14	0,31	-0,79	0,26
14	-1,61	0,12	-1,46	-0,02	-1,12	-0,07
15	-1,83	-0,10	-1,68	-0,24	-1,40	-0,35
16	-1,69	0,04	-1,57	-0,13	-1,26	-0,21
17	-1,94	-0,21	-1,84	-0,39	-1,54	-0,49
18	-1,68	0,05	-1,37	0,07	-1,02	0,03
20	-2,04	-0,31	-1,95	-0,51	-1,65	-0,60
21	-1,51	0,22	-1,42	0,03	-1,14	-0,09
22	-2,05	-0,32	-1,71	-0,27	-1,30	-0,25
23	-1,47	0,26	-1,14	0,31	-0,78	0,27
24	-1,54	0,19	-1,22	0,23	-0,85	0,20
25	-1,93	-0,20	-1,55	-0,10	-1,17	-0,12
26	-1,53	0,20	-1,11	0,33	-0,72	0,33
27	-1,48	0,25	-1,12	0,33	-0,80	0,25
28	-1,60	0,13	-1,27	0,17	-0,89	0,16
MEDIA	-1,73	0,00	-1,44	0,00	-1,05	0,00
MAX.	-1,45	0,28	-1,11	0,33	-0,52	0,53
MÍN	-2,18	-0,45	-1,95	-0,51	-1,65	-0,60
DESV.P.	0,23	0,23	0,26	0,26	0,29	0,29
	GPM540	GPM540 m	GPM540b	GPM540b m	GPM540c	GPM540c m

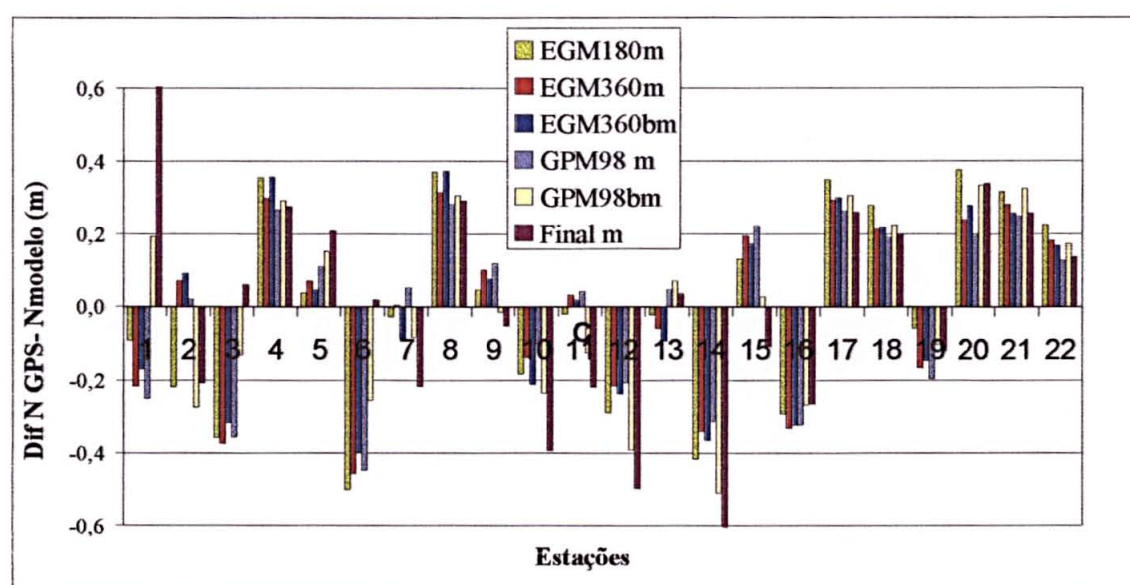


Figura 51. Avaliação absoluta dos modelos obtidos, no Uruguai.

Tabela 18. Diferenças entre a altura geoidal obtida com GPS e a dos modelos geoidais, 1, 2, 3 e 7 (baseados no EGM96), para os dados da Argentina (alturas geoidais em m).

No.	Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3		Modelo 7	
	EGM180	EGM180m	EGM360	EGM360m	EGM360b	EGM360bm	Final	Final m
1	-1,37	-0,04	-1,32	-0,04	-1,29	0,01	-0,72	0,12
2	-1,38	-0,05	-1,36	-0,08	-1,36	-0,06	-0,77	0,07
3	-1,41	-0,08	-1,38	-0,10	-1,38	-0,08	-0,79	0,05
4	-1,27	0,06	-1,27	0,01	-1,3	0,00	-0,69	0,15
5	-1,26	0,07	-1,26	0,02	-1,29	0,01	-0,69	0,15
6	-1,10	0,23	-1,19	0,09	-1,21	0,09	-0,53	0,31
7	-1,12	0,21	-1,20	0,08	-1,22	0,08	-0,55	0,29
8	-1,43	-0,10	-1,39	-0,11	-1,42	-0,12	-0,87	-0,03
9	-1,42	-0,09	-1,38	-0,10	-1,41	-0,11	-0,85	-0,01
10	-1,32	0,01	-1,32	-0,04	-1,33	-0,03	-0,75	0,09
11	-1,32	0,01	-1,27	0,01	-1,27	0,03	-0,81	0,03
12	-1,39	-0,06	-1,34	-0,06	-1,36	-0,06	-0,88	-0,04
13	-1,45	-0,12	-1,36	-0,08	-1,39	-0,09	-0,98	-0,14
14	-1,35	-0,02	-1,32	-0,04	-1,34	-0,04	-0,82	0,02
15	-1,29	0,04	-1,23	0,05	-1,23	0,07	-0,78	0,06
16	-1,25	0,08	-1,20	0,08	-1,2	0,10	-0,74	0,10
17	-1,26	0,07	-1,23	0,05	-1,24	0,06	-0,77	0,07
18	-1,39	-0,06	-1,34	-0,06	-1,35	-0,05	-0,94	-0,10
19	-1,38	-0,05	-1,32	-0,04	-1,35	-0,05	-0,93	-0,09
20	-1,49	-0,16	-1,41	-0,13	-1,48	-0,18	-1,12	-0,28
21	-1,50	-0,17	-1,42	-0,14	-1,47	-0,17	-1,13	-0,29
22	-1,21	0,12	-1,17	0,11	-1,16	0,14	-0,8	0,04
23	-1,08	0,25	-1,07	0,21	-1,09	0,21	-0,58	0,26
24	-1,20	0,13	-1,18	0,10	-1,22	0,08	-0,72	0,12
25	-1,17	0,16	-1,10	0,18	-1,11	0,19	-0,76	0,08
26	-1,19	0,14	-1,13	0,15	-1,15	0,15	-0,79	0,05
27	-1,38	-0,05	-1,29	-0,01	-1,31	-0,01	-1,16	-0,32
28	-1,40	-0,07	-1,30	-0,02	-1,33	-0,03	-1,18	-0,34
29	-1,36	-0,03	-1,29	-0,01	-1,3	0,00	-1,23	-0,39
MEDIA	-1,33	0,00	-1,28	0,00	-1,30	0,00	-0,84	0,00
MÁX.	-1,08	0,25	-1,07	0,21	-1,09	0,21	-0,53	0,31
MIN	-1,50	-0,17	-1,42	-0,14	-1,48	-0,18	-1,23	-0,39
DESV.P.	0,11	0,11	0,09	0,09	0,10	0,10	0,18	0,18
	EGM180	EGM180m	EGM360	EGM360m	EGM360b	EGM360bm	Final	Final m

Tabela 18a. Diferenças entre a altura geoidal obtida com GPS e a dos modelos geoidais 4, 5 e 6 (baseados no GPM98CR), para os dados da Argentina (alturas geoidais em m).

No.	Modelo 4		Modelo 5		Modelo 6	
	GPM540	GPM540 m	GPM540b	GPM540b m	GPM540c	GPM540c m
1	-1,13	-0,01	-1,00	-0,02	-0,77	-0,02
2	-1,15	-0,03	-1,01	-0,03	-0,78	-0,03
3	-1,17	-0,05	-1,04	-0,06	-0,8	-0,05
4	-1,08	0,04	-0,92	0,06	-0,69	0,06
5	-1,07	0,05	-0,91	0,07	-0,68	0,07
6	-1,01	0,11	-0,82	0,16	-0,59	0,16
7	-1,02	0,10	-0,83	0,15	-0,6	0,15
8	-1,17	-0,05	-1,07	-0,09	-0,84	-0,09
9	-1,17	-0,05	-1,06	-0,08	-0,83	-0,08
10	-1,14	-0,02	-0,98	0,00	-0,75	0,00
11	-1,10	0,02	-0,96	0,02	-0,73	0,02
12	-1,16	-0,04	-1,07	-0,09	-0,81	-0,06
13	-1,17	-0,05	-1,13	-0,15	-0,88	-0,13
14	-1,15	-0,03	-1,03	-0,05	-0,77	-0,02
15	-1,10	0,02	-0,95	0,03	-0,72	0,03
16	-1,06	0,06	-0,91	0,07	-0,68	0,07
17	-1,12	0,00	-0,95	0,03	-0,73	0,02
18	-1,17	-0,05	-1,05	-0,07	-0,82	-0,07
19	-1,16	-0,04	-1,04	-0,06	-0,8	-0,05
20	-1,20	-0,08	-1,19	-0,21	-0,95	-0,20
21	-1,27	-0,15	-1,21	-0,23	-0,98	-0,23
22	-1,03	0,09	-0,87	0,11	-0,65	0,10
23	-0,94	0,18	-0,80	0,18	-0,56	0,19
24	-1,04	0,08	-0,93	0,05	-0,69	0,06
25	-1,00	0,12	-0,85	0,13	-0,64	0,11
26	-1,05	0,07	-0,87	0,11	-0,66	0,09
27	-1,10	0,02	-1,02	-0,04	-0,8	-0,05
28	-1,12	0,00	-1,02	-0,04	-0,82	-0,07
29	-1,13	-0,01	-0,99	-0,01	-0,79	-0,04
MÉDIA	-1,12	0,00	-0,98	0,00	-0,75	0,00
MÁX.	-0,94	0,18	-0,80	0,18	-0,56	0,19
MÍN	-1,27	-0,15	-1,21	-0,23	-0,98	-0,23
DESV.P.	0,07	0,07	0,10	0,10	0,10	0,10
	GPM540	GPM540 m	GPM540b	GPM540b m	GPM540c	GPM540c m

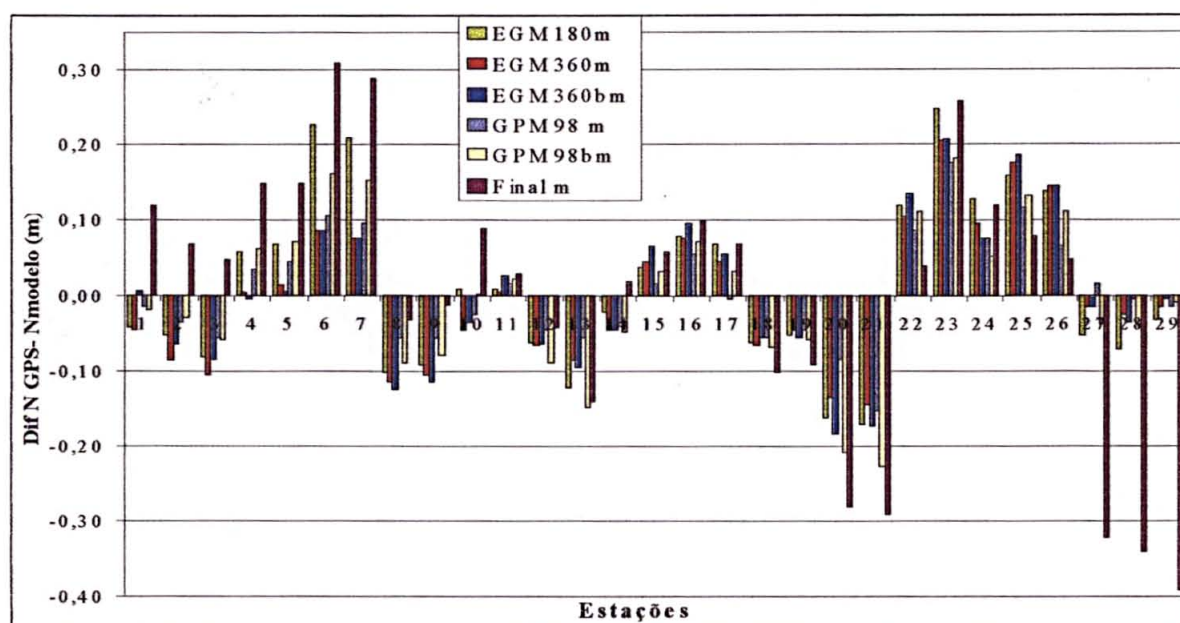


Figura 52. Avaliação absoluta dos modelos obtidos, na Argentina.

As Tabelas anteriores indicam em forma clara, a existência de um desvio sistemático nos geóides, entre modelos baseados em modelos geopotenciais diferentes, assim como entre os sistemas altimétricos da Argentina e do Uruguai. Este desvio sistemático é um somatório de diversos erros, que são introduzidos no processo do cálculo do geóide. Algumas causas conhecidas são as seguintes:

- erros na determinação dos coeficientes de baixo grau dos modelos geopotenciais, causando desvios sistemáticos de longo comprimento de onda;
- diferenças entre os sistemas altimétricos e gravimétricos usados no cálculo do modelo geoidal;
- erros introduzidos no processo de geração das quadrículas, já que todos os métodos de interpolação produzem algum tipo de filtragem no resultado;
- erros na determinação das redes GPS e altimétrica de cada país;
- uso restrito dos dados gravimétricos em relação à correção atmosférica da gravidade.

O valor total dessa componente sistemática, varia para cada modelo geoidal calculado, como exemplos de cálculos recentes, citam-se:

- geóide da Bélgica, valor do erro de -2,32 m (Poitevin *et al.*, 1997);
- geóide do Canadá, valor do erro, aproximadamente de -3 m (Sideris, 1997b);
- geóide nos Alpes da sul da França, valor de -1,087 m (Duquene e Jiang, 1997);
- geóide da Polônia, valor de -0,31 m (Lyszkowicz e Forsberg, 1997).

No caso do Uruguai (Tabela 17), os geóides baseados no modelo EGM96, apresentam um valor médio de -1,90, enquanto os modelos baseados no GPM98CR, os valores são de -1,73 m e -1,44 m. Fica evidente também, que o uso das anomalias ar-livre obtidas a partir das correspondentes Bouguer, diminui o erro sistemático (modelo 6 da Tabela 17a.), mas não melhorou, na área avaliada, os erros estatísticos do modelo. As melhores estatísticas do conjunto, são fornecidas pelo modelo GPM540 para o Uruguai, porém cabe salientar que as diferenças entre os valores obtidos para todos os modelos são pequenas.

No caso da Argentina, o comportamento é semelhante ao registrado na Tabela anteriormente mencionada. Os modelos baseados no EGM96, apresentam um valor médio de -1,30 m, enquanto os modelos do GPM98CR, têm valores de -1,12 e -0,75 m. O valor do desvio padrão melhorou em forma significativa, indicando que os dados de controle, possuem

uma qualidade e homogeneidade superior aos dados de Uruguai. O melhor modelo foi novamente o GPM540.

O modelo Final, apresentou em todas as Tabelas a menor média (o erro sistemático), mas as suas estatísticas para as alturas geoidais, foram as piores.

6.2 AVALIAÇÃO RELATIVA

A avaliação relativa, foi realizada com os 24 dados disponíveis para o Uruguai, em 01/02/2000. O procedimento foi semelhante à avaliação absoluta, processando com o programa *ondula*, o arquivo de dados GPS e o modelo geoidal correspondente. Como o programa calcula apenas a altura geoidal em cada ponto, formaram-se após as diferenças entre estações, nas alturas geoidais do modelo avaliado, correspondente a cada dado de controle.

Os resultados, são apresentados através de uma Tabela e Figura, específica para cada modelo nos quais, adicionou-se o polinômio de segunda ordem, representativo do comportamento das alturas geoidais do respectivo modelo.

Nesta avaliação, cada Tabela possui as seguintes colunas:

- N° de identificação; seguida de
- duas colunas contendo cada uma, os nomes das estações da linha relativa;
- a quarta coluna, contém a distância entre as estações da linha;
- na quinta e sexta colunas, os desníveis de controle, elipsoidal e ortométrico respectivamente;
- na sétima e oitava colunas, as alturas geoidais GPS/RNs (resultado da diferença entre as quinta e sexta colunas) e a altura geoidal do modelo correspondente;
- na nona coluna, é apresentada a diferença entre as alturas geoidais mencionadas; e finalmente,
- na décima coluna, a diferença da nona coluna é dividida pela distância entre estações (quarta coluna), para obter a diferença em termos de ppm.

As duas últimas linhas da Tabela, mostram os valores das alturas geoidais calculadas e as diferenças entre elas, em termos de média e desvio padrão do conjunto, usando um modelo estatístico gaussiano.

Tabela 19. Avaliação relativa do modelo 1 (EGM180) (alturas geoidais e desníveis em m).

No.	De	Para	Dist. (km)	Δh	ΔH	ΔN_{GPS}	ΔN_{mod}	Dif. $\Delta N(m)$	ppm	
1	ETCHEGARAY	BELLA VISTA	190,536	245,14	246,45	-1,31	-1,58	0,27	1,40	
2	BELLA VISTA	FORTALEZA	247,132	0,53	-0,93	1,46	2,17	0,71	2,89	
3	ETCHEGARAY	SERRA	280,509	280,51	282,87	-2,36	-2,23	0,13	0,47	
4	SERRA	BELLA VISTA	108,557	-35,37	-36,42	1,05	0,65	0,40	3,66	
5	ETCHEGARAY	PUNTAS DEL YI	242,478	128,88	130,25	-1,37	-0,78	0,59	2,43	
6	BELLA VISTA	I - T.O. AGRACIADA	235,146	87,31	87,46	-0,15	0,18	0,33	1,40	
7	MONTEVIDEO	SGM	10	-69,06	-68,98	-0,08	-0,06	0,02	2,30	
8	MONTEVIDEO	I - T.O. AGRACIADA	229,981	95,129	96,72	-1,59	-1,99	0,40	1,73	
9	MONTEVIDEO	ARTILLEROS	135,004	60,273	61,52	-1,25	-1,57	0,32	2,39	
10	II RIACHUELO	ARTILLEROS	140,505	-34,629	-34,47	-0,16	-0,09	0,07	0,49	
11	II LAG. PATOS	MONTEVIDEO	146,462	-100,189	-100,97	0,78	1,44	0,66	4,50	
12	I - CANGUE	I - T.O. AGRACIADA	161,76	9,105	8,36	0,75	0,74	0,01	0,03	
13	I - CANGUE	BELLA VISTA	167,551	-78,205	-79,1	0,89	0,56	0,33	2,00	
14	CIUDAD COSTA A	CIUDAD COSTA B	4,647	-2,69	-2,7	-0,01	-0,06	0,05	10,76	
15	I - MANGA	SGM	12,139	-40,88	-40,86	-0,02	-0,14	0,12	9,89	
16	SGM	CERRO VIGIA	204,679	-358,7602	-358,37	-0,39	1,41	1,80	8,80	
17	CERRO VIGIA	PUNTAS DEL YI	164,092	-100,83	-98,39	-2,44	-2,46	0,02	0,12	
18	CERRO VIGIA	BELLA VISTA	276,943	15,428	18,81	-3,38	-3,52	0,14	0,50	
19	CERRO VIGIA	ETCHEGARAY	363,38	56,31	58,92	-2,61	-1,94	0,67	1,84	
20	CERRO VIGIA	I - T.O. AGRACIADA	458,504	102,738	106,27	-3,53	-3,34	0,19	0,42	
21	CERRO VIGIA	I - CANGUE	423,757	93,633	97,91	-4,28	-4,08	0,20	0,46	
22	MONTEVIDEO	ETCHEGARAY	433,675	-237,317	-237,19	-0,13	-0,59	0,46	1,07	
24	TOPADOR	ALMEIDA	37,156	68,35	68,59	-0,24	-0,28	0,04	1,05	
						Média	-0,89	-0,76	0,34	2,63
						Desv. pad.	1,59	1,67	0,39	3,07

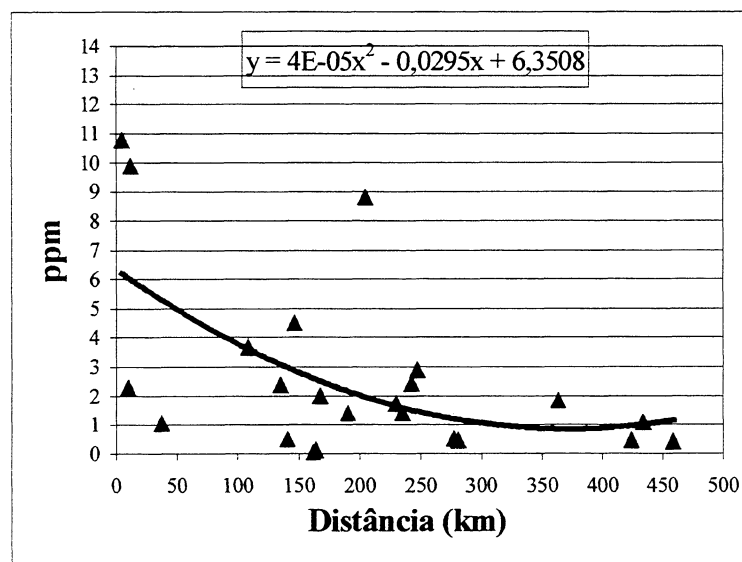


Figura 53. Avaliação relativa do modelo 1 (EGM180).

Tabela 20. Avaliação relativa do modelo 2, (EGM360) (alturas geoidais e desníveis em m).

No.	De	Para	Dist. (km)	Δh	ΔH	ΔN_{GPS}	ΔN_{mod}	Dif. $\Delta N(m)$	ppm
1	ETCHEGARAY	BELLA VISTA	190,54	245,14	246,45	-1,31	-1,28	0,03	0,18
2	BELLA VISTA	FORTALEZA	247,13	0,53	-0,93	1,46	1,81	0,35	1,43
3	ETCHEGARAY	SERRA	280,51	280,51	282,87	-2,36	-1,92	0,44	1,57
4	SERRA	BELLA VISTA	108,56	-35,37	-36,42	1,05	0,64	0,41	3,75
5	ETCHEGARAY	PUNTAS DEL YI	242,48	128,88	130,25	-1,37	-0,57	0,80	3,30
6	BELLA VISTA	I - T.O. AGRACIADA	235,15	87,31	87,46	-0,15	0,05	0,20	0,85
7	MONTEVIDEO	SGM	10,00	-69,06	-68,98	-0,08	-0,06	0,02	2,30
8	MONTEVIDEO	I - T.O. AGRACIADA	229,98	95,13	96,72	-1,59	-1,76	0,17	0,73
9	MONTEVIDEO	ARTILLEROS	135,00	60,27	61,52	-1,25	-1,33	0,08	0,61
10	II RIACHUELO	ARTILLEROS	140,51	-34,63	-34,47	-0,16	-0,09	0,07	0,49
11	II LAG. PATOS	MONTEVIDEO	146,46	-100,19	-100,97	0,78	1,19	0,41	2,79
12	I - CANGUE	I - T.O. AGRACIADA	161,76	9,11	8,36	0,75	0,67	0,08	0,46
13	I - CANGUE	BELLA VISTA	167,55	-78,21	-79,1	0,89	0,62	0,27	1,64
14	CIUDAD COSTA A	CIUDAD COSTA B	4,65	-2,69	-2,7	-0,01	-0,05	0,04	8,61
15	I - MANGA	SGM	12,14	-40,88	-40,86	-0,02	-0,12	0,10	8,24
16	SGM	CERRO VIGIA	204,679	-153,87	-155,77	1,90	1,52	0,38	1,85
17	CERRO VIGIA	PUNTAS DEL YI	164,09	-100,83	-98,39	-2,44	-2,56	0,12	0,73
18	CERRO VIGIA	BELLA VISTA	276,94	15,43	18,81	-3,38	-3,27	0,11	0,40
19	CERRO VIGIA	ETCHEGARAY	363,38	56,31	58,92	-2,61	-1,99	0,62	1,71
20	CERRO VIGIA	I - T.O. AGRACIADA	458,50	102,74	106,27	-3,53	-3,22	0,31	0,68
21	CERRO VIGIA	I - CANGUE	423,76	93,63	97,91	-4,28	-3,89	0,39	0,91
22	MONTEVIDEO	ETCHEGARAY	433,68	-237,32	-237,19	-0,13	-0,53	0,40	0,93
24	TOPADOR	ALMEIDA	37,16	68,35	68,59	-0,24	-0,3	0,06	1,59
					Média	-0,79	-0,71	0,26	1,99
					Desv. pad.	1,69	1,57	0,21	2,24

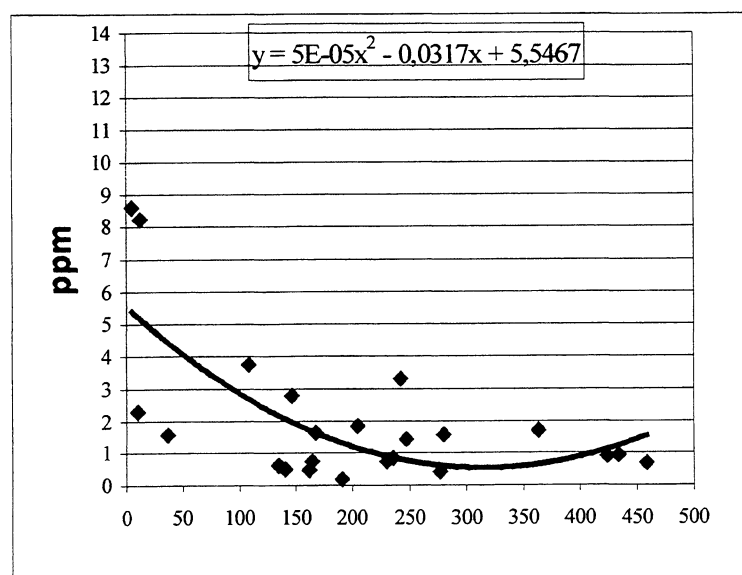


Figura 54. Avaliação relativa do modelo 2 (EGM360).

Tabela 21. Avaliação relativa do modelo 3 (EGM360b) (alturas geoidais e altitudes em m).

No.	De	Para	Dist. (km)	Δh	ΔH	ΔN_{GPS}	ΔN_{mod}	Dif. $\Delta N(m)$	ppm
1	ETCHEGARAY	BELLA VISTA	190,536	245,14	246,45	-1,31	-1,46	0,15	0,77
2	BELLA VISTA	FORTALEZA	247,132	0,53	-0,93	1,46	2,13	0,67	2,73
3	ETCHEGARAY	SERRA	280,509	280,51	282,87	-2,36	-2,14	0,22	0,79
4	SERRA	BELLA VISTA	108,557	-35,37	-36,42	1,05	0,68	0,37	3,38
5	ETCHEGARAY	PUNTAS DEL YI	242,478	128,88	130,25	-1,37	-0,60	0,77	3,18
6	BELLA VISTA	I - T.O. AGRACIADA	235,146	87,31	87,46	-0,15	0,08	0,23	0,98
7	MONTEVIDEO	SGM	10	-69,06	-68,98	-0,08	-0,12	0,04	3,70
8	MONTEVIDEO	I - T.O. AGRACIADA	229,981	95,129	96,72	-1,59	-2,05	0,46	2,00
9	MONTEVIDEO	ARTILLEROS	135,004	60,273	61,52	-1,25	-1,54	0,29	2,17
10	II RIACHUELO	ARTILLEROS	140,505	-34,629	-34,47	-0,16	-0,1	0,06	0,42
11	II LAG. PATOS	MONTEVIDEO	146,462	-100,189	-100,97	0,78	1,39	0,61	4,16
12	I - CANGUE	I - T.O. AGRACIADA	161,76	9,105	8,36	0,75	0,75	0,00	0,03
13	I - CANGUE	BELLA VISTA	167,551	-78,205	-79,1	0,89	0,67	0,22	1,34
14	CIUDAD COSTA	CIUDAD COSTA B	4,647	-2,69	-2,7	-0,01	-0,07	0,06	12,91
15	I - MANGA	SGM	12,139	-40,88	-40,86	-0,02	-0,11	0,09	7,41
16	SGM	CERRO VIGIA	204,679	-153,87	-155,77	1,90	1,78	0,12	0,59
17	CERRO VIGIA	PUNTAS DEL YI	164,092	-100,83	-98,39	-2,44	-2,93	0,49	2,99
18	CERRO VIGIA	BELLA VISTA	276,943	15,428	18,81	-3,38	-3,79	0,41	1,47
19	CERRO VIGIA	ETCHEGARAY	363,38	56,31	58,92	-2,61	-2,33	0,28	0,77
20	CERRO VIGIA	I - T.O. AGRACIADA	458,504	102,738	106,27	-3,53	-3,71	0,18	0,39
21	CERRO VIGIA	I - CANGUE	423,757	93,633	97,91	-4,28	-4,46	0,18	0,43
22	MONTEVIDEO	ETCHEGARAY	433,675	-237,317	-237,19	-0,13	-0,67	0,54	1,25
24	TOPADOR	ALMEIDA	37,156	68,35	68,59	-0,24	-0,36	0,12	3,20
					Média	-0,79	-0,82	0,29	2,48
					Desv.pac	1,69	1,81	0,22	2,84

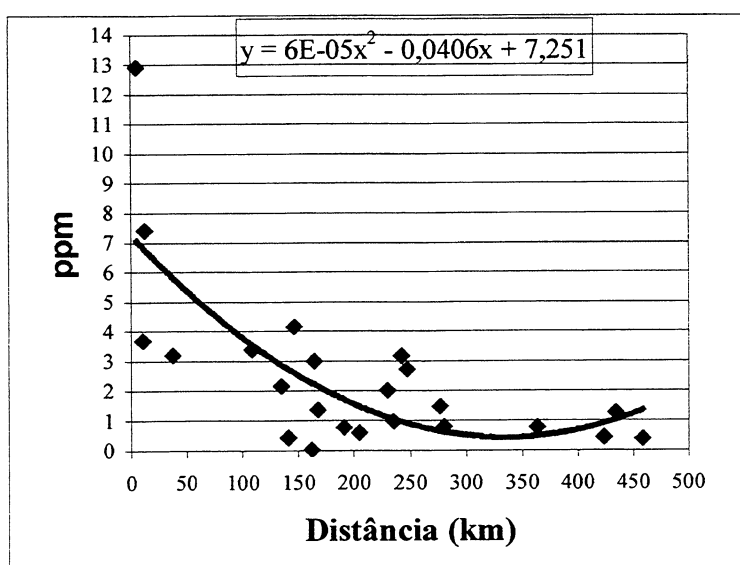


Figura 55. Avaliação relativa do modelo 3 (EGM360b).

Tabela 22. Avaliação relativa do modelo 4 (GPM540) (alturas geoidais e desníveis em m).

No.	De	Para	Dist. (km)	Δh	ΔH	N_{GPS}	N_{mod}	ΔN (m)	ppm
1	ETCHEGARAY	BELLA VISTA	190,536	245,14	246,45	-1,31	-1,42	0,11	0,56
2	BELLA VISTA	FORTALEZA	247,132	0,53	-0,93	1,46	2,08	0,62	2,52
3	ETCHEGARAY	SERRA	280,509	280,51	282,87	-2,36	-2,00	0,36	1,29
4	SERRA	BELLA VISTA	108,557	-35,37	-36,42	1,05	0,58	0,47	4,30
5	ETCHEGARAY	PUNTAS DEL YI	242,478	128,88	130,25	-1,37	-0,57	0,80	3,30
6	BELLA VISTA	I - T.O. AGRACIADA	235,146	87,31	87,46	-0,15	0,26	0,41	1,74
7	MONTEVIDEO	SGM	10	-69,06	-68,98	-0,08	-0,07	0,01	1,30
8	MONTEVIDEO	I - T.O. AGRACIADA	229,981	95,13	96,72	-1,59	-1,82	0,23	1,00
9	MONTEVIDEO	ARTILLEROS	135,004	60,27	61,52	-1,25	-1,41	0,16	1,21
10	II RIACHUELO	ARTILLEROS	140,505	-34,63	-34,47	-0,16	-0,08	0,08	0,56
11	II LAG. PATOS	MONTEVIDEO	146,462	-100,19	-100,97	0,78	1,27	0,49	3,34
12	I - CANGUE	I - T.O. AGRACIADA	161,76	9,11	8,36	0,75	0,75	0,00	0,03
13	I - CANGUE	BELLA VISTA	167,551	-78,21	-79,10	0,89	0,49	0,40	2,42
14	CIUDAD COSTA	CIUDAD COSTA B	4,647	-2,69	-2,70	-0,01	-0,06	0,05	10,76
15	I - MANGA	SGM	12,139	-40,88	-40,86	-0,02	-0,14	0,12	9,89
16	SGM	CERRO VIGIA	204,679	-153,87	-155,77	1,90	1,75	0,15	0,73
17	CERRO VIGIA	PUNTAS DEL YI	164,092	-100,83	-98,39	-2,44	-2,91	0,47	2,86
18	CERRO VIGIA	BELLA VISTA	276,943	15,43	18,81	-3,38	-3,76	0,38	1,36
19	CERRO VIGIA	ETCHEGARAY	363,38	56,31	58,92	-2,61	-2,34	0,27	0,74
20	CERRO VIGIA	I - T.O. AGRACIADA	458,504	102,74	106,27	-3,53	-3,50	0,03	0,07
21	CERRO VIGIA	I - CANGUE	423,757	93,63	97,91	-4,28	-4,25	0,03	0,06
22	MONTEVIDEO	ETCHEGARAY	433,675	-237,32	-237,19	-0,13	-0,88	0,75	1,74
24	TOPADOR	ALMEIDA	37,156	68,35	68,59	-0,24	-0,37	0,13	3,47
					Média	-0,79	-0,80	0,28	2,40
					Desv.pad	1,69	1,74	0,24	2,77

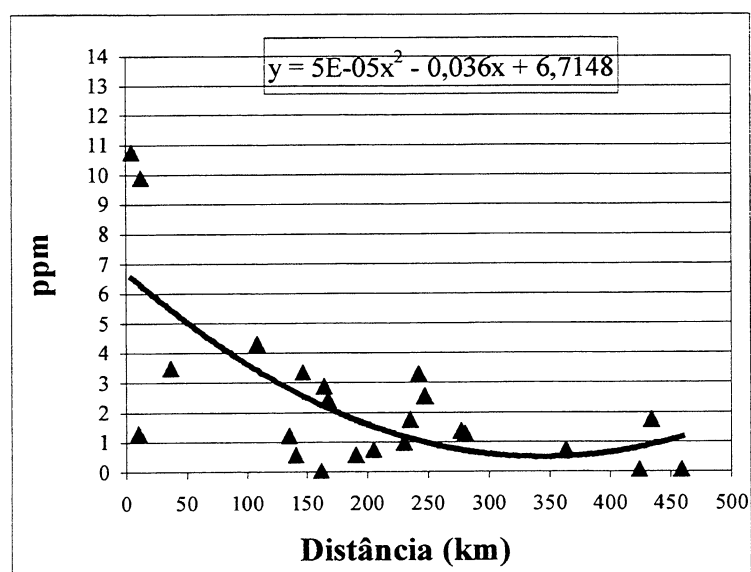


Figura 56. Avaliação relativa do modelo 4 (GPM540).

Tabela 23. Avaliação relativa do modelo 5 (GPM540b), obtido a partir de anomalias gravimétricas Bouguer (alturas geoidais e desníveis em m).

No.	De	Para	Dist. (km)	Δh	ΔH	ΔN_{GPS}	ΔN_{mod}	Dif. $\Delta N(m)$	ppm
1	ETCHEGARAY	BELLA VISTA	190,536	245,14	246,45	-1,31	-1,64	0,33	1,71
2	BELLA VISTA	FORTALEZA	247,132	0,53	-0,93	1,46	1,88	0,42	1,72
3	ETCHEGARAY	SERRA	280,509	280,51	282,87	-2,36	-2,40	0,04	0,14
4	SERRA	BELLA VISTA	108,557	-35,37	-36,42	1,05	0,76	0,29	2,64
5	ETCHEGARAY	PUNTAS DEL YI	242,478	128,88	130,25	-1,37	-0,82	0,55	2,27
6	BELLA VISTA	I - T.O. AGRACIADA	235,146	87,31	87,46	-0,15	-0,10	0,05	0,21
7	MONTEVIDEO	SGM	10	-69,06	-68,98	-0,08	-0,05	0,03	3,30
8	MONTEVIDEO	I - T.O. AGRACIADA	229,981	95,13	96,72	-1,59	-1,98	0,39	1,69
9	MONTEVIDEO	ARTILLEROS	135,004	60,27	61,52	-1,25	-1,57	0,32	2,39
10	II RIACHUELO	ARTILLEROS	140,505	-34,63	-34,47	-0,16	-0,05	0,11	0,78
11	II LAG. PATOS	MONTEVIDEO	146,462	-100,19	-100,97	0,78	1,48	0,70	4,77
12	I - CANGUE	I - T.O. AGRACIADA	161,76	9,11	8,36	0,75	0,59	0,16	0,96
13	I - CANGUE	BELLA VISTA	167,551	-78,21	-79,10	0,89	0,69	0,20	1,22
14	CIUDAD COSTA A	CIUDAD COSTA B	4,647	-2,69	-2,70	-0,01	-0,07	0,06	12,91
15	I - MANGA	SGM	12,139	-40,88	-40,86	-0,02	-0,11	0,09	7,41
16	SGM	CERRO VIGIA	204,679	-153,87	-155,77	1,90	1,41	0,49	2,39
17	CERRO VIGIA	PUNTAS DEL YI	164,092	-100,83	-98,39	-2,44	-2,42	0,02	0,12
18	CERRO VIGIA	BELLA VISTA	276,943	15,43	18,81	-3,38	-3,24	0,14	0,51
19	CERRO VIGIA	ETCHEGARAY	363,38	56,31	58,92	-2,61	-1,60	1,01	2,78
20	CERRO VIGIA	I - T.O. AGRACIADA	458,504	102,74	106,27	-3,53	-3,34	0,19	0,42
21	CERRO VIGIA	I - CANGUE	423,757	93,63	97,91	-4,28	-3,93	0,35	0,82
22	MONTEVIDEO	ETCHEGARAY	433,675	-237,32	-237,19	-0,13	-0,60	0,47	1,09
24	TOPADOR	ALMEIDA	37,156	68,35	68,59	-0,24	-0,35	0,11	2,93
					Média	-0,79	-0,76	0,28	2,40
					Desv.pad.	1,69	1,62	0,25	2,84

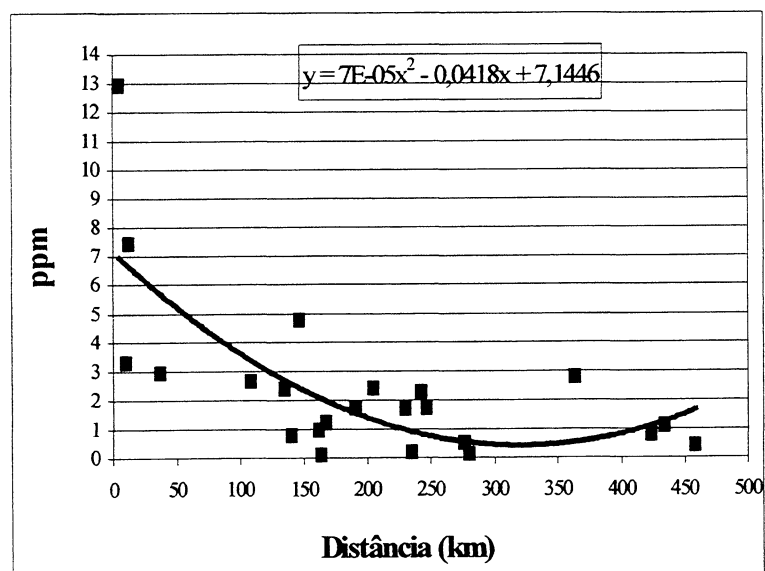


Figura 57. Avaliação relativa do modelo 5 (GPM540b).

Tabela 24. Avaliação relativa do modelo 6 (GPM540c), obtido a partir de anomalias gravimétricas Bouguer, considerando o efeito indireto de terreno na gravidade (alturas geoidais e desníveis em m).

No.	De	Para	Dist. (km)	Δh	ΔH	ΔN_{GPS}	ΔN_{mod}	Dif. $\Delta N(m)$	ppm
1	ETCHEGARAY	BELLA VISTA	190,536	245,14	246,45	-1,31	-1,79	0,48	2,50
2	BELLA VISTA	FORTALEZA	247,132	0,53	-0,93	1,46	1,65	0,19	0,79
3	ETCHEGARAY	SERRA	280,509	280,51	282,87	-2,36	-2,68	0,32	1,14
4	SERRA	BELLA VISTA	108,557	-35,37	-36,42	1,05	0,87	0,18	1,63
5	ETCHEGARAY	PUNTAS DEL YI	242,478	128,88	130,25	-1,37	-0,86	0,51	2,10
6	BELLA VISTA	I - T.O. AGRACIADA	235,146	87,31	87,46	-0,15	-0,4	0,25	1,06
7	MONTEVIDEO	SGM	10	-69,06	-68,98	-0,08	-0,02	0,06	6,30
8	MONTEVIDEO	I - T.O. AGRACIADA	229,981	95,129	96,72	-1,59	-2,05	0,46	2,00
9	MONTEVIDEO	ARTILLEROS	135,004	60,273	61,52	-1,25	-1,58	0,33	2,47
10	II RIACHUELO	ARTILLEROS	140,505	-34,629	-34,47	-0,16	-0,02	0,14	0,99
11	II LAG. PATOS	MONTEVIDEO	146,462	-100,189	-100,97	0,78	1,53	0,75	5,11
12	I - CANGUE	I - T.O. AGRACIADA	161,76	9,105	8,36	0,75	0,52	0,23	1,39
13	I - CANGUE	BELLA VISTA	167,551	-78,205	-79,1	0,89	0,92	0,03	0,15
14	CIUDAD COSTA A	CIUDAD COSTA B	4,647	-2,69	-2,7	-0,01	-0,06	0,05	10,76
15	I - MANGA	SGM	12,139	-40,88	-40,86	-0,02	-0,11	0,09	7,41
16	SGM	CERRO VIGIA	204,679	-153,87	-155,77	1,90	1,47	0,43	2,10
17	CERRO VIGIA	PUNTAS DEL YI	164,092	-100,83	-98,39	-2,44	-2,17	0,27	1,65
18	CERRO VIGIA	BELLA VISTA	276,943	15,428	18,81	-3,38	-3,1	0,28	1,02
19	CERRO VIGIA	ETCHEGARAY	363,38	56,31	58,92	-2,61	-1,31	1,30	3,58
20	CERRO VIGIA	I - T.O. AGRACIADA	458,504	102,738	106,27	-3,53	-3,5	0,03	0,07
21	CERRO VIGIA	I - CANGUE	423,757	93,633	97,91	-4,28	-4,02	0,26	0,61
22	MONTEVIDEO	ETCHEGARAY	433,675	-237,317	-237,19	-0,13	-0,18	0,05	0,12
24	TOPADOR	ALMEIDA	37,156	68,35	68,59	-0,24	-0,27	0,03	0,78
						Média	-0,79	-0,75	0,29
						Desv. pad.	1,69	1,64	2,64

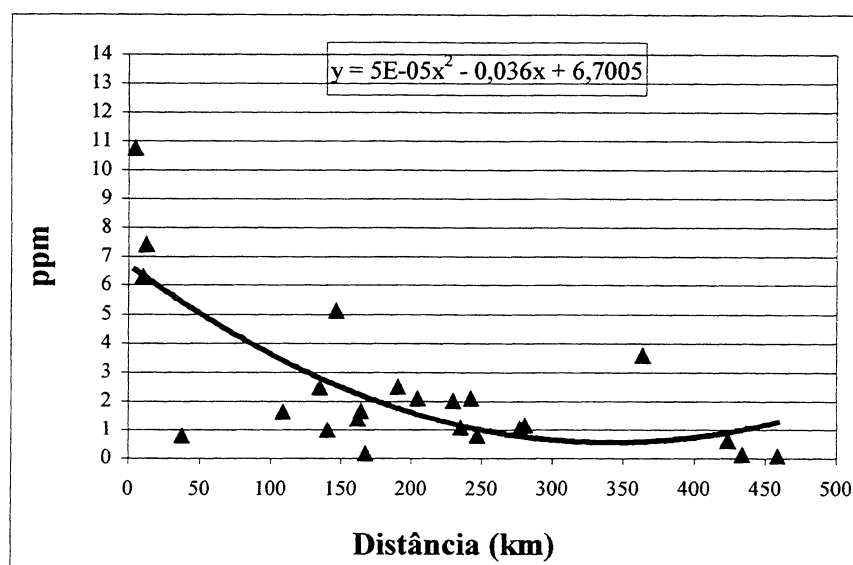


Figura 58. Avaliação relativa do modelo 6 (GPM540c).

Tabela 25. Avaliação relativa do modelo 7 (Final), obtido a partir do modelo geopotencial EGM96 (120), anomalias gravimétricas Bouguer, com espaçamento de 10'x 10' e considerando o efeito indireto de terreno na gravidade (alturas geoidais e desníveis em m).

No.	De	Para	Dist. (km)	Δh	ΔH	ΔN_{GPS}	ΔN_{mod}	Dif. $\Delta N(m)$	ppm
1	ETCHEGARAY	BELLA VISTA	190,536	245,14	246,45	-1,31	-1,86	0,55	2,87
2	BELLA VISTA	FORTALEZA	247,132	0,53	-0,93	1,46	1,67	0,21	0,87
3	ETCHEGARAY	SERRA	280,509	280,51	282,87	-2,36	-2,76	0,40	1,42
4	SERRA	BELLA VISTA	108,557	-35,37	-36,42	1,05	0,9	0,15	1,35
5	ETCHEGARAY	PUNTAS DEL YI	242,478	128,88	130,25	-1,37	-0,96	0,41	1,69
6	BELLA VISTA	I - T.O. AGRACIADA	235,146	87,31	87,46	-0,15	-0,43	0,28	1,19
7	MONTEVIDEO	SGM	10	-69,06	-68,98	-0,08	-0,07	0,01	1,30
8	MONTEVIDEO	I - T.O. AGRACIADA	229,981	95,129	96,72	-1,59	-2,1	0,51	2,21
9	MONTEVIDEO	ARTILLEROS	135,004	60,273	61,52	-1,25	-1,59	0,34	2,54
10	II RIACHUELO	ARTILLEROS	140,505	-34,629	-34,47	-0,16	-0,09	0,07	0,49
11	II LAG. PATOS	MONTEVIDEO	146,462	-100,189	-100,97	0,78	1,57	0,79	5,39
12	I - CANGUE	I - T.O. AGRACIADA	161,76	9,105	8,36	0,75	0,49	0,26	1,58
13	I - CANGUE	BELLA VISTA	167,551	-78,205	-79,1	0,89	0,92	0,03	0,15
14	CIUDAD COSTA A	CIUDAD COSTA B	4,647	-2,69	-2,7	-0,01	-0,05	0,04	8,61
15	I - MANGA	SGM	12,139	-40,88	-40,86	-0,02	-0,14	0,12	9,89
16	SGM	CERRO VIGIA	204,679	-153,87	-155,77	1,90	1,51	0,39	1,91
17	CERRO VIGIA	PUNTAS DEL YI	164,092	-100,83	-98,39	-2,44	-2,21	0,23	1,40
18	CERRO VIGIA	BELLA VISTA	276,943	15,428	18,81	-3,38	-3,11	0,27	0,98
19	CERRO VIGIA	ETCHEGARAY	363,38	56,31	58,92	-2,61	-1,25	1,36	3,74
20	CERRO VIGIA	I - T.O. AGRACIADA	458,504	102,738	106,27	-3,53	-3,54	0,01	0,02
21	CERRO VIGIA	I - CANGUE	423,757	93,633	97,91	-4,28	-4,03	0,25	0,58
22	MONTEVIDEO	ETCHEGARAY	433,675	-237,317	-237,19	-0,13	-0,29	0,16	0,38
24	TOPADOR	ALMEIDA	37,156	68,35	68,59	-0,24	-0,27	0,03	0,78
					Média	-0,79	-0,77	0,30	2,23
					Desv. pad.	1,69	1,65	0,30	2,53

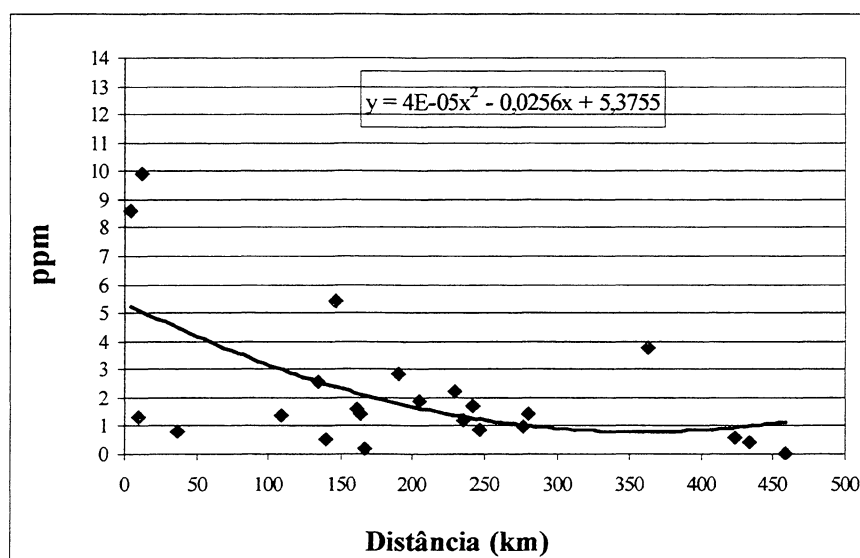


Figura 59. Avaliação relativa do modelo 7 (Final).

A avaliação relativa, indicou o modelo 2 (EGM360) como melhor fornecendo um erro inferior a 2 ppm por km.

Para uma melhor avaliação deste modelo, dividiram-se os dados em duas Tabelas diferentes, que apresentam os resultados, uma para distâncias médias e longas e a outra para pequenas distâncias inferiores de 20 km. A quantidade de dados das amostras, não é significativo em nenhum dos dois casos, mas fornecem indicativos de comportamento do modelo. O erro do modelo neste caso ficou no valor de 1,33 ppm.

A Figura 60, mostra os resultados e duas funções, uma para médias e longas distâncias, de tipo linear e na cor vermelha e uma outra polinomial, na cor preta. A diferença entre as duas linhas das funções é desprezível.

Tabela 26. Resultados do modelo 2 (EGM360), para distâncias médias e longas.

No.	De	Para	Dist. (km)	Δh	ΔH	ΔN_{GPS}	ΔN_{mod}	Dif. $\Delta N(m)$	ppm
1	ETCHEGARAY	BELLA VISTA	190,536	245,14	246,45	-1,31	-1,28	0,03	0,18
2	BELLA VISTA	FORTALEZA	247,132	0,53	-0,93	1,46	1,81	0,35	1,43
3	ETCHEGARAY	SERRA	280,509	280,51	282,87	-2,36	-1,92	0,44	1,57
4	SERRA	BELLA VISTA	108,557	-35,37	-36,42	1,05	0,64	0,41	3,75
5	ETCHEGARAY	PUNTAS DEL YI	242,478	128,88	130,25	-1,37	-0,57	0,80	3,30
6	BELLA VISTA	I - T.O. AGRACIADA	235,146	87,31	87,46	-0,15	0,05	0,20	0,85
8	MONTEVIDEO	I - T.O. AGRACIADA	229,981	95,13	96,72	-1,59	-1,76	0,17	0,73
9	MONTEVIDEO	ARTILLEROS	135,004	60,27	61,52	-1,25	-1,33	0,08	0,61
10	II RIACHUELO	ARTILLEROS	140,505	-34,63	-34,47	-0,16	-0,09	0,07	0,49
11	II LAG. PATOS	MONTEVIDEO	146,462	-100,19	-100,97	0,78	1,19	0,41	2,79
12	I - CANGUE	I - T.O. AGRACIADA	161,76	9,11	8,36	0,75	0,67	0,08	0,46
13	I - CANGUE	BELLA VISTA	167,551	-78,21	-79,10	0,89	0,62	0,27	1,64
16	SGM	CERRO VIGIA	204,679	-153,87	-155,77	1,90	1,52	0,38	1,86
17	CERRO VIGIA	PUNTAS DEL YI	164,092	-100,83	-98,39	-2,44	-2,56	0,12	0,73
18	CERRO VIGIA	BELLA VISTA	276,943	15,43	18,81	-3,38	-3,27	0,11	0,40
19	CERRO VIGIA	ETCHEGARAY	363,38	56,31	58,92	-2,61	-1,99	0,62	1,71
20	CERRO VIGIA	I - T.O. AGRACIADA	458,504	102,74	106,27	-3,53	-3,22	0,31	0,68
21	CERRO VIGIA	I - CANGUE	423,757	93,63	97,91	-4,28	-3,89	0,39	0,91
22	MONTEVIDEO	ETCHEGARAY	433,675	-237,32	-237,19	-0,13	-0,53	0,40	0,93
24	TOPADOR	ALMEIDA	37,156	68,35	68,59	-0,24	-0,3	0,06	1,59
						Média	-0,90	-0,81	0,29
						Desv. pad.	1,79	1,67	0,20

Tabela 27. Resultados do modelo 2 (EGM360), para distâncias inferiores a 15 km.

No.	De	Para	Dist. (km)	Δh	ΔH	ΔN_{GPS}	ΔN_{mod}	Dif. $\Delta N(m)$	ppm
7	MONTEVIDEO	SGM	10	-69,06	-68,98	-0,08	-0,06	0,02	2,30
14	CIUDAD COSTA A	CIUDAD COSTA B	4,647	-2,69	-2,70	-0,01	-0,05	0,04	8,61
15	I - MANGA	SGM	12,139	-40,88	-40,86	-0,02	-0,12	0,10	8,24
						Média	-0,04	-0,08	0,05
						Desv. pad.	0,03	0,03	0,03

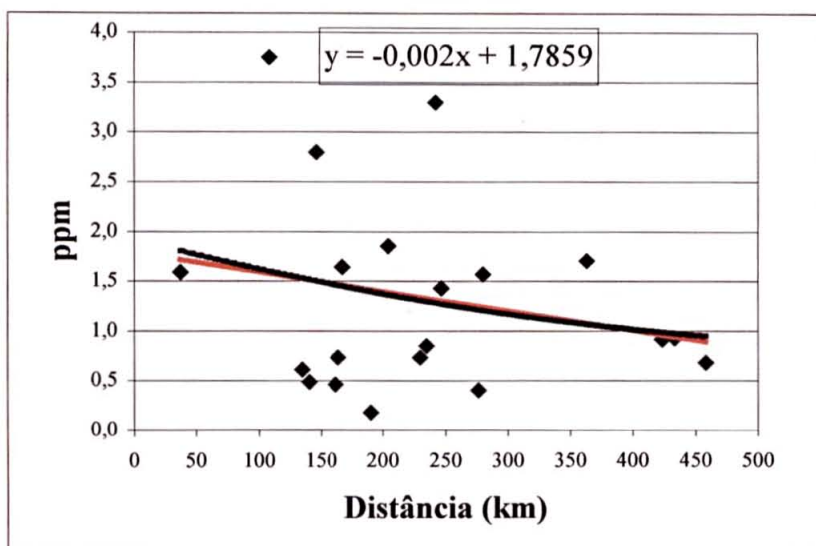


Figura 60. Modelo 2 (EGM360) para distâncias médias e longas.

6.3 RESUMO DA AVALIAÇÃO E ESCOLHA DO MODELO GEOIDAL

As Tabelas 28 e 29, resumem as principais estatísticas apresentadas nas seções anteriores.

A Tabela 28 mostra na primeira linha, os nomes dos modelos avaliados, nas linhas dois a quatro, as estatísticas da avaliação relativa e nas linhas cinco a doze a avaliação absoluta para o Uruguai e a Argentina.

Os parâmetros apresentados da avaliação relativa são, a diferença média entre as alturas geoidais, geradas pelo modelo avaliado e pelo dado de controle (Dif. Méd.), o erro relativo em partes por milhão da distância (ppm) e o seu desvio padrão.

Os parâmetros da avaliação absoluta são os valores máximo e mínimo (máx. e mín.) obtidos da diferença entre a altura geoidal do modelo e de controle, em cada estação, a variação entre os valores máximo e mínimo (linhas sétima e undécima) e o correspondente desvio padrão. Em cada tipo de avaliação, destacou-se em **negrito**, os melhores valores do conjunto.

Tabela 28. Resumo da avaliação realizada nos modelos geoidais (diferenças médias, máximos, mínimos e variação em m).

		EGM180	EGM360	EGM360b	GPM540	GPM540b	GPM540c	Final	
Relativa	Dif. Méd.	0,34	0,26	0,29	0,28	0,28	0,29	0,30	
	ppm	2,63	1,99	2,48	2,40	2,40	2,42	2,23	
	Des. Pad.	3,07	2,24	2,84	2,77	2,84	2,64	2,53	
Absoluta	Uruguai	máx.	0,38	0,31	0,37	0,28	0,33	0,53	0,61
		mín.	-0,50	-0,46	-0,40	-0,45	-0,51	-0,60	-0,61
		Variação	0,88	0,77	0,77	0,73	0,84	1,13	1,22
		Des. Pad.	0,28	0,25	0,25	0,23	0,25	0,28	0,30
	Argentina	máx.	0,25	0,21	0,21	0,18	0,18	0,19	0,31
		mín.	-0,17	-0,14	-0,18	-0,15	-0,23	-0,23	0,39
		Variação	0,42	0,35	0,39	0,33	0,41	0,42	0,70
		Des. Pad.	0,12	0,10	0,11	0,07	0,10	0,10	0,18

A Tabela 29, mostra os valores das funções representativas do comportamento de cada modelo, em forma relativa. Estes valores, foram obtidos a partir de um ajustamento por método de mínimos quadrados, usando as diferenças resultantes, entre a altura geoidal relativa gerada pelo modelo e a altura relativa do arquivo de controle, para cada par de estações.

Tabela 29. Funções polinomiais de segunda ordem, representativas da avaliação relativa de cada modelo geoidal.

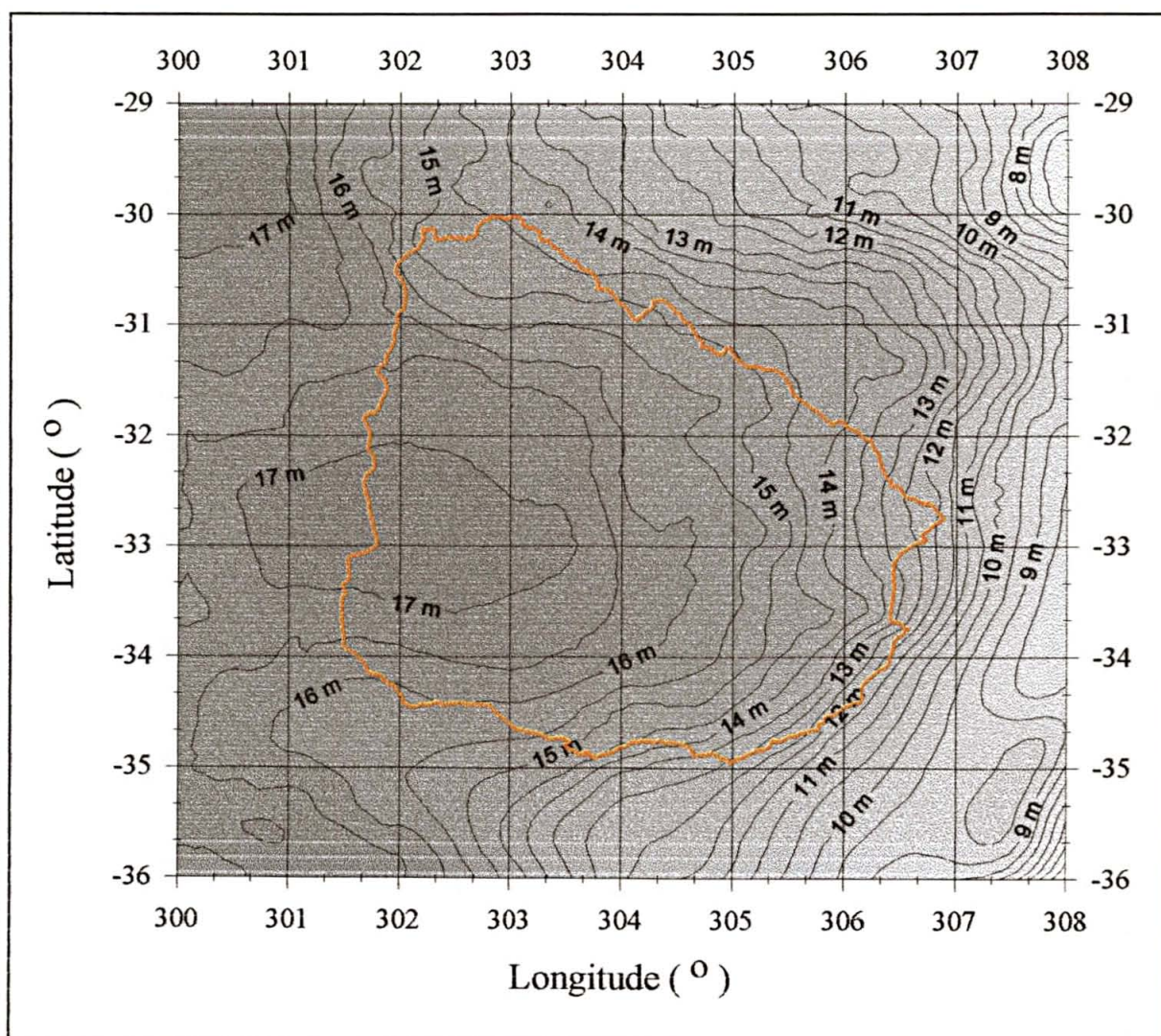
Modelo / termo	x^2	x	t. indep.
1 (EGM180)	4,0E-05	-0,0295	6,3508
2 (EGM360)	5,0E-05	-0,0317	5,5467
3 (EGM360b)	6,0E-05	-0,0406	7,2510
4 (GPM540)	5,0E-05	-0,0360	6,7148
5 (GPM540b)	7,0E-05	-0,0418	7,1446
6 (GPM540c)	5,0E-05	-0,0360	6,7005
7 (Final)	4,0E-05	-0,0256	5,3755

Como conclusão da avaliação, pode-se estabelecer que:

- a) Apesar das variações feitas no cálculo dos modelos geoidais, as diferenças estatísticas são de pequeno valor, mostrando que foi feito o melhor uso dos dados disponíveis;

- b) O modelo geoidal que em forma *absoluta* apresentou as melhores estatísticas, foi o 4 (GPM540), seguido pelos modelos 2 (EGM360) e 3 (EGM360b). esta situação repetiu-se tanto para os dados do Uruguai como para os da Argentina.
- c) Na avaliação *relativa*, o melhor modelo geoidal foi o 2 (EGM96), seguido do modelo 7 (Final) (também baseado no modelo geopotencial EGM96 (360)) e do modelo 4 (GPM540);
- d) Em relação às funções polinomiais de segundo grau, que caracterizam o comportamento de cada modelo geoidal na avaliação relativa, nota-se que:
- os termos independentes de menor valor, são os dos modelos 2 (EGM96) e 7 (Final). Este termo está vinculado à adaptação do modelo para distâncias curtas, estabelecendo um mínimo de erro a ser cometido no seu uso.
 - o termo de primeiro grau, é o mais significativo, ele indica quanto diminui (sinal negativo) o erro cometido, em função da distância. Os melhores valores são para os modelos, 5 (GPM540b) e 3 (EGM96b), com valores semelhantes e logo após os modelos 6 (GPM540c), 2 (EGM360), 4 (GPM540) e 1 (EGM180).
 - Combinando estas informações, o modelo geoidal 2 (EGM96), surge como a melhor opção.
- e) Considerando que o modelo tem como objetivo principal, a transformação de altitudes elipsoidais em ortométricas no Uruguai e que a técnica principal de trabalho em levantamentos com receptores GPS é a relativa, e os itens expostos neste Capítulo, o modelo geoidal que melhor adaptou-se a estas exigências, foi o modelo 2 (EGM360), constituindo-se no resultado final principal do presente trabalho. Conforme o planejamento anterior do projeto (Subiza, 1999c, d), ele é denominado de UruGeóide 2000, sendo apresentado com suas principais características na Figura 61.

Mapa Geoidal, Modelo UruGeoide 2000



Elipsóide de referencia: WGS84 (G873)

Datum Vertical: Montevideu 1948,0

Intervalo de contorno: 0,5 m

Data de cálculo: 1 de Março de 2000

Precisões: Absoluta: 0,25 m

Relativa: 2 mm por km

1,3 mm por km (distâncias superiores a 30 km)

Figura 61. Modelo geoidal UruGeoide 2000.

CAPÍTULO 7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O principal objetivo deste trabalho foi a apresentação do cálculo de um modelo geoidal de alta precisão e resolução para o Uruguai, definido pelos paralelos -29° e -36° e os meridianos 300° e 308° (-60° a -52°). A disponibilidade de modelos do geopotencial e de programas para o cálculo do geóide, permitiu determinar e avaliar um total de 7 modelos geoidais diferentes. Nos cálculos desses modelos geoidais, foi usada com êxito a técnica de decomposição da altura geoidal, com aplicação principal através da FFT, uma aproximação não usada anteriormente no caso do Uruguai. Na aplicação desta técnica, foram combinadas anomalias gravimétricas ar-livre, coeficientes dos modelos do geopotencial EGM96 ou GPM540CR e um modelo digital do terreno de alta resolução. Os dados gravimétricos e topográficos, foram complementados com dados obtidos de modelos globais, a fim de completar vazios de informação fora do território uruguaio. Esta integração mostrou-se eficaz na resolução deste problema. O sistema geodésico adotado para coordenadas e gravidade teórica foi o WGS84 (G873) e para altitudes o datum Montevidéu, 1948,0.

A técnica de cálculo através da FFT, mostrou-se simples, eficiente e rápida, permitindo que o relativamente grande volume de dados, fosse processado num computador de mesa.

Na avaliação absoluta dos modelos, foram usados 51 dados de controle disponíveis, localizados em parte da Argentina e do Uruguai. A componente de erro sistemático vertical, ou seja, a separação entre o nível zero dos modelos calculados e o datum vertical adotado, variou entre $-1,9$ e $-1,05$ m, não afetando a precisão dos mesmos. Diversas causas podem justificar estas grandezas, as principais são: erro na determinação do datum vertical uruguaio (um valor estimado entre $+0,3$ a $+0,5$ m), erro causado pelo uso dos coeficientes do geopotencial sem referir ao elipsóide WGS84 (estimado de $+0,53$ m) e finalmente o erro de truncamento na correção atmosférica da gravidade observada (estimado em $+0,24$ m). Eliminado esta componente sistemática, o erro absoluto teve um desvio padrão entre $0,25$ e $0,3$ m, atingindo a meta de $0,3$ m ou menor, estabelecida no planejamento prévio do trabalho (Subiza, 1999e).

A avaliação relativa foi efetuada empregando 24 observações entre pontos da rede geodésica uruguaia. A precisão variou entre $1,99$ e $2,63$ ppm, atingindo também o valor previsto no planejamento feito, que foi de 3 a 5 ppm.

Nas avaliações feitas, evidenciou-se o maior erro altimétrico nas estações GPS do Uruguai, do que nas da Argentina, o que motiva a realização de novas observações GPS no Uruguai. Os modelos calculados, apresentaram diferenças pequenas entre eles, sendo que a

escolha final baseou-se no desempenho geral dos modelos em ambas avaliações, com preferência para os dados relativos de Uruguai, devido à área geográfica de futura aplicação do modelo e do método de trabalho, atualmente empregado nos levantamentos com GPS.

O modelo escolhido, denominado UruGeóide 2000, representou uma significativa melhoria, em relação ao modelo anterior GeoidUru 94 e aos modelos geopotenciais disponíveis, os que forneceram por exemplo, erros absolutos e relativos maiores que $\pm 1,2$ m e 10 ppm respectivamente, para o EGM96 (Subiza 1999d). Concluiu-se também que, uma melhora na precisão e acurácia dos modelos, será possível de obter em função de maior quantidade e qualidade nos dados disponíveis.

Como subprodutos deste trabalho podem ser citados:

- a preparação e formação das bases de dados, gravimétricos e de relevo do Uruguai, incluindo na primeira o efeito direto do relevo;
- a passagem final da Base de Dados Gravimétricos de Uruguai, de uma base em formato de arquivos ascii a uma base relacional (no formato Microsoft Access), com capacidade de procura e controle dos dados existentes;
- a melhora nas rotinas de entrada saída e de interpolação do programa *ondula*, usado pelo SGM nas determinações das alturas geoidais.

Com base nestas considerações e a experiência colhida nas diversas etapas do trabalho, são feitas as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

1. Realizar uma campanha de observações GPS no Uruguai, exclusivamente sobre RNs, com efeito de possuir uma maior precisão nos dados de controle de futuros modelos geoidais;
2. Melhorar o MTD, tanto no Uruguai como nas áreas vizinhas, procurando atingir uma resolução espacial de 1 km ou melhor, como forma de alcançar uma precisão decimétrica nos futuros modelos geoidais. Neste aspecto, espera-se que o próximo modelo global topográfico cujas observações possuem uma resolução espacial de 30 m, vá fornecer uma importante contribuição (NASA, 2000);
3. Incluir novas observações gravimétricas, especialmente na zona noroeste (Argentina), onde existem apenas as linhas gravimétricas principais. Neste aspecto, as missões dos satélites Grace e Champ (NASA, 2000 e GFZ, 2000), podem constituir-se numa valiosa fonte de dados gravimétricos, permitindo uma melhora qualitativa do modelo do geopotencial.

4. Nos próximos modelos a determinar, é recomendável:

- a) pesquisar o uso de anomalias gravimétricas ar-livre, obtidas das anomalias Bouguer, na zona geográfica correspondente ao Brasil e no resto da área, usar anomalias calculadas diretamente das observações da gravidade;
- b) pesquisar programas que usem a FFT, para cálculo do efeito direto do terreno nas áreas marinhas, ou adaptar o programa *tc2dfipl*;
- c) reduzir as observações gravimétricas, assim como as topográficas a um referencial comum, desde que as diferenças sejam conhecidas;
- d) usar exclusivamente aproximações esféricas do núcleo da integral de Stokes, especialmente a aproximação rigorosa;
- e) desconsiderar o efeito indireto do relevo topográfico nas alturas geoidais e considerá-lo na gravidade.

CAPÍTULO 8 - REFERENCIAS

1. BAGLIETTO, E. & CERRATO, A. **Mediciones gravimétricas en puntos del fondo del Rio de la Plata.** In: Contribuciones a la Geodesia Aplicada. Editora Universidad de Buenos Aires, pp. 5-6, Argentina, 1965.
2. BLITZKOW, D., CINTRA, J.P., SERVICIO GEOGRÁFICO MILITAR **La determinación de alturas geoidales en el Uruguay. Resultados presentes y perspectivas futuras.** Informe Interno SGM/USP, 14 pp., 1994.
3. BLITZKOW, D., **A preliminary gravimetric geoid for South America** In: New Geoids in the World. IGeS Bulletin No. 4, Bulletin d' Information No. 77, Special Issue, pp. 53-66, Milão, Itália 1997.
4. BUREAU GRAVIMÉTRIQUE INTERNATIONAL **Bulletin d'Information No. 80**, 46 pp., Toulouse, França, Junho 1997.
5. DUQUENE, H. & JIANG Z. **The Geoid in the Southern Alps of France.** In: New Geoids in the World - IGeS Bulletin No. 4, Bulletin d' Information No. 77, Special Issue, pp. 115-129, Milan, Italy, 1997.
6. FORSBERG, R. **Terrain Effects in Geoid Computations** In: Lectures Notes of the 2nd. International School for the Determination and Use of the Geoid. Edited by the IGeS, 33 pp., Rio de Janeiro, Brasil, 1997.
7. GEMAEL, C. **Introdução ao Ajustamento de Observações. Aplicações Geodésicas.** Editora UFPR, 319 pp., Curitiba, Brasil, 1994.
8. GEMAEL, C. **Introdução à Geodésia Física.** Editora UFPR, 302 pp., Curitiba, Brasil, 1999.
9. GEOFORSCHUNGSZENTRUM POTSDAM **The Champ Homepage** Em: <http://www.gfz-potsdam.de/pb1/CHAMP/champ.htm>, dezembro, 1999.
10. GROTEN E. **Model refinements in the solutions of the boundary value problem of Physical Geodesy.** In: Local gravity field approximation. Summer School. Edited by K. P. Schwarz, pp. 217-273, Calgary, Canada, 1984.
11. HEISKANEN, W., MORITZ, H. **Geodesia Física.** Instituto Geográfico Nacional, 369 pp, Madri, Espanha, 1985.
12. HWANG, C., KAO, E-U., PARSONS, B. **Global marine gravity anomalies from Seasat, Geosat, ERS-1 and TOPEX/POSEIDON altimeter data.** In: <http://gps.cv.nctu.edu.tw/research/>, 1999.

13. IGeS, International Geoid Service. **New Geoids in the World**. IGeS Bulletin N. 4, Bulletin d'Information N. 77, Special Issue, 190 pp. Milão, Itália, 1997.
14. JEKELI, C. **An investigation of two models for the degree variances of global covariance functions**. The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Report Nr. 275, Columbus, USA, 1974.
15. KRUEGER, C. P., ARANA J. M., CORDINI, J., FERREIRA, L. D. D., CAMARGO, P. O., FABRI, S. M. **Teoria do Potencial**. 2^a Edição. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, 99 pp., Curitiba, Brasil, 1996.
16. LEMOINE, F. G., KENYON, S. C., FACTOR, J. K., TRIMMER, R. G., PAVLIS, N. K., CHINN, D. S., COX S. M., LUTHCKE S. B., TORRENCE, M. H. , WANG, Y. M., WILLIAMSON, R. G., PAVLIS, E. C., RAPP, R. H., OLSON, T. R. **The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96**. NASA/TP-1998-206861, 575 pp., USA, 1998
17. LI, Y. **HFTGBVP USER'S GUIDE**. Department of Geomatics Engineering of The University of Calgary, 25 pp., Canada, 1994.
18. LI, Y. **TOPOGEOP USER'S GUIDE**. Department of Geomatics Engineering of The University of Calgary, 24 pp., Canada, 1994b.
19. LYSZKOWICZ, A. & FORSBERG, R. **Gravimetric Geoid for Poland Area using spherical FFT**. In: New Geoids in the World - IGeS Bulletin No. 4, Bulletin d'Information No. 77, Special Issue, pp. 153-161, Milan, Italy, 1997.
20. NAHAVANDCHI, H., SJÖBERG, L. E. **Terrain corrections to power H^3 in gravimetric geoid determination**. Journal of Geodesy 72: 124-35, 1998.
21. NASA **The GRACE homepage** Em: <http://essp.gsfc.nasa.gov/grace.html>, Março 2000.
22. NASA e NIMA **The Shuttle Radar Topography Mission (SRTM)** In: <http://www.jpl.nasa.gov/srtm/>, Fevereiro, 2000.
23. NIMA, National Imagery and Mapping Agency. **Department of Defense World Geodetic System 1984. Its definition and Relationship with Local Geodetic Systems**. Technical Report 8350.2 3rd Edition, 171 pp., USA, 1998.
24. NIMA, National Imagery and Mapping Agency. **WGS84 EGM96 HOMEPAGE** In: <http://164.214.2.59/geospatial/products/GandG/WGS84/egm96.html>. Maio, 1999.
25. MORITZ, H. **Advanced Physical Geodesy**. Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe, 499 pp, 1980.

26. MORITZ, H. **Geodetic Reference System 1980**. Bulletin Geodésique 66:187-192, 1992.
27. PAVLIS, N. **Development an application of Geopotential Models**. In: 2nd. International School for the Determination and Use of the Geoid. Edited by the IGeS, 46 pp., Rio de Janeiro, Brasil, 1997.
28. PERDOMO, R. e DEL COGLIANO D. **The geoid in Buenos Aires region** In: IGeS, Bulletin No. 9, Special Issue for South America, pp. 109-166, June 1999.
29. PESSOA, L. M. D. C. **Geóide Gravimétrico local em área da Bacia do Paraná**. Dissertação de Mestrado no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, 214 pp., Curitiba, Brasil, 1996.
30. POITEVIN, C., JIANG, Z. EVERAERTS, M. **The Belgian Gravimetric Geoid**. In: New Geoids in the World - IGeS Bulletin No. 4, Bulletin d' Information No. 77, Special Issue, pp. 77-104, Milan, Italy, 1997.
31. RAPP, R.H. **Past and future developments in geopotencial models**. Em: International Association of Geodesy Symposia. Geodesy, Geoid, Geodynamics and Antarctic, 19:58-78, 1998.
32. SCHWAB, S. H. S. **Análise espectral em Geodésia**. Seminário apresentado à disciplina Geodésia Avançada no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, 19 pp., Curitiba, Brasil, 1995.
33. SCHWARZ, K.P., SIDERIS, M.G., FORSBERG, R **The use of FFT techniques in physical Geodesy** Geophysical Journal International, 100: 485-514, 1990.
34. SERVICIO GEOGRÁFICO MILITAR **Red Gravimétrica Fundamental-Resumen de valores**. 43 pp., Montevideo, Uruguay, 1973.
35. SERVICIO GEOGRÁFICO MILITAR **Comunicação pessoal**. Montevideo, Uruguay, 1998.
36. SEVILLA, M.J. **A new gravimétric geoid in the Iberian Peninsula**. In: New Geoids in the World - IGeS Bulletin No. 4, Bulletin d' Information No. 77, Special Issue, pp. 163-178, Milan, Italy, 1997.
37. SIDERIS, M.G. **Geoid determination by FFT techniques**. In: Lectures Notes of the 2nd.International School for the Determination and Use of the Geoid, International Geoid Service, pp. 165-229, Rio de Janeiro, Brasil, 1997.
38. SIDERIS, M.G. **The gravity field in surveying and geodesy**. In: Lectures Notes for ENGO 527, 118 pp., USP, São Paulo, 1999.
39. SIDERIS, M.G. **Comunicação pessoal**. São Paulo,Brasil, 1999b

40. SJÖBERG, L. E. **The terrain effect in geoid computation from satellite derived geopotential models.** Bollettino di Geodesia e Scienze affini 4: 384-392, 1996.
41. SJÖBERG, L. E. **The IAG approach to the atmospheric geoid correction in Stokes' formula and a new strategy.** Journal of Geodesy 73: 362-366, 1999.
42. SUBIZA P., W.H. . **O geóide gravimétrico no Uruguai. Pesquisas preliminares.** Seminário apresentado na disciplina Tópicos especiais em Geodésia, no CPGCG da Universidade Federal do Paraná, 65 pp., 1998a.
43. SUBIZA P., W.H., TORGE, W., TIMMEN, L. **The National Gravimetric Network of Uruguay.** Geodesy on the Move. Gravity, Geoid Geodynamics and Antarctic, International Association of Geodesy Symposia, Volume 119. Springer Verlag Editores, Alemanha, 1998b.
44. SUBIZA P., W.H., PÉREZ RODINO, R., BARBATO, F. COSTA, S.M.A. **The Redefinition of the National Geodetic Network into SIRGAS frame.** International Association of Geodesy Symposia, Volume 118. Springer Verlag Editores, Alemanha 1998c.
45. SUBIZA P., W.H. **A avaliação de modelos geopotenciais para modelagem do geóide local.** Seminário II apresentado no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésica da Universidade Federal do Paraná, 66 pp., Brasil, 1999a.
46. SUBIZA P., W.H. **Avances en la determinación de un geode de precisión para Uruguay.** Bulletin No. 9, Special Issue for South America. International Geoid Service, págs. 99-107, 1999b.
47. SUBIZA P., W.H. **Un geode de precisión para Uruguay- Informe del proyecto UruGeoid 2000** Anais em CDROM do 6o. Congresso Internacional da Sociedade Brasileira de Geofísica, Potential Field Methods session, 10 pp., Rio de Janeiro, Brasil, 1999c.
48. SUBIZA P., W.H. **A Determinação de um Modelo Geoidal de Precisão para o Uruguai** Seminário III de Qualificação, apresentado no CPGCG da Universidade Federal do Paraná, 72 pp., Curitiba, Brasil, 1999d.
49. TSCHERNING, C. C., RAPP, R. H. **Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance.** The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Report Nr. 208, Columbus, USA, 1974
50. TORGE, W. **Geodesy 2nd.** Edition. Walter de Gruyter editores, 264 pp., Alemanha, 1991.

51. TZIAVOS, I.N. **Comparisons of spectral techniques for geoid computations over large regions**. Journal of Geodesy, Volume No. 70, págs. 357-373, 1996.
52. UNITED STATES GEOLOGICAL SURVEY **Global 30 arc-second elevation data set**. In: <http://edcwww.cr.usgs.gov/landaac/gtopo30/gtopo30.html>.
53. UNSANDIVARAS, J.C., FONT, G., TOCHO, C., LUGONES, A., GROSFELD, V. **Determinación del geoide en llanura**. Bulletin No. 9, Special Issue for South America. International Geoid Service, págs. 13-19, 1999.
54. WENZEL, G. **Lectures of spectral analysis and digital filtering** Notas de aulas, C.P.G.C.G. da Universidade Federal do Paraná, 301 pp., Curitiba, Brasil, 1995.
55. WENZEL, G. **Ultra High Degree Geopotential Model GPM98A, B and C to Degree 1800**. In: <http://www.ife.uni-hannover.de/~wenzel>, 1998.
56. WENZEL, G. **Globals models of the gravity field of high and ultra-high resolution**. Preprint for the Bulletin of the International Geoid Service, 36 pp., 1999.
57. WENZEL, G. e DENKER, H. **Comunicação pessoal** Hanôver, Alemanha, Abril de 1999.

A EQUAÇÃO DE LAPLACE E OS HARMÔNICOS ESFÉRICOS

1. EQUAÇÃO DE LAPLACE EM COORDENADAS RETANGULARES

Considerando-se o potencial de atração gerado por um sistema discreto de massa

$$V = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i} \quad (1)$$

com $r = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{1/2}$. Através de derivações, obtém-se que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

O mesmo se obtém para um sistema de distribuição contínua de massa. Daí conclui-se que o Laplaciano do potencial V , em coordenadas cartesianas é nulo no exterior das massas ($\Delta V = 0$) e V é uma função harmônica.

2 EQUAÇÃO DE LAPLACE EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Considerando o sistema de coordenadas esféricas mostrado na Figura 1, obtém-se :

$$\Delta V = r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (3)$$

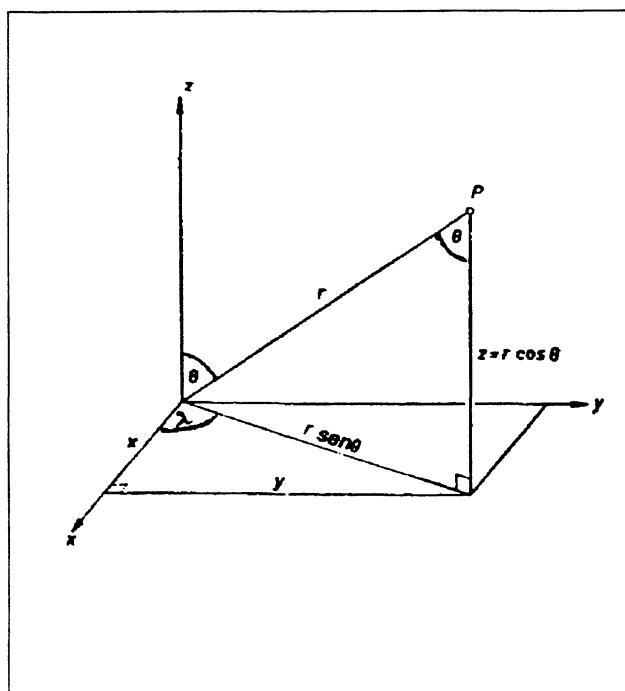


Figura 1. Sistema de coordenadas esféricas. Fonte: Heiskanen & Moritz, 1985

3. HARMÔNICOS ESFÉRICOS

As funções harmônicas constituem soluções da equação de Laplace $\Delta V = 0$. Essa equação proporciona a representação do potencial gerado por uma distribuição contínua de massas, (Krueger *et al.*, 1996). Sua solução é dada pelas funções harmônicas (Heiskanen & Moritz, 1985):

$$V_i(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda], \quad (5)$$

$$V_e(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda], \quad (6)$$

e constituem o desenvolvimento em séries de harmônicos esféricos do potencial de atração interno e externo, respectivamente, onde a_{nm} e b_{nm} são coeficientes do desenvolvimento e P_{nm} são as funções de Legendre associadas de grau n e ordem m , respectivamente.

Os coeficientes do desenvolvimento de grau n e ordem m são dados por:

$$a_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} f(\theta, \lambda) P_n(\cos \theta) d\sigma, \quad (7)$$

$$a_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{\sigma} f(\theta, \lambda) R_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma \text{ para } m \neq 0, \quad (8)$$

$$b_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{\sigma} f(\theta, \lambda) S_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma \text{ para } m \neq 0, \quad (9)$$

onde $f(\theta, \lambda)$ é uma função arbitrária na superfície da esfera,

$$R_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos \theta) \cos(m\lambda) \quad (10)$$

e

$$S_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos \theta) \sin(m\lambda), \quad (11)$$

são os denominados harmônicos esféricos de superfície.

As fórmulas acima expressas, são de difícil cálculo e uso, sendo substituídas pelas ditas *normalizadas*. São apresentadas na seqüência, as *plenamente normalizadas*. As funções normalizadas \bar{R}_{nm} e \bar{S}_{nm} , de grau n e ordem m , são calculadas através das expressões

$$\bar{R}_{n0}(\theta, \lambda) = \sqrt{2n+1} R_{n0}(\theta, \lambda) = \sqrt{2n+1} P_n(\cos \theta); \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \end{array} \right\} = \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \left\{ \begin{array}{l} R_{nm}(\theta, \lambda) \\ S_{nm}(\theta, \lambda) \end{array} \right\}, \quad (13)$$

o que permite calcular os coeficientes normalizados do desenvolvimento, com as expressões

$$\bar{a}_{nm} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} f(\theta, \lambda) \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma \quad (14)$$

$$\bar{b}_{nm} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} f(\theta, \lambda) \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma \quad (15)$$

As funções de Legendre associadas são normalizadas com as expressões a seguir:

$$\bar{P}_{n0}(t) = \sqrt{2n+1} 2^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} t^{n-2k} \quad (16)$$

$$\bar{P}_{nm}(t) = \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} 2^{-n} (1-t^2)^{m/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} t^{n-m-2k} \quad (17)$$

sendo k o maior inteiro $\leq (n-m)/2$ e $t = \cos \theta$.

Os coeficientes convencionais e normalizados, possuem a seguinte relação

$$\bar{a}_{n0} = \frac{a_{n0}}{\sqrt{2n+1}} \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} \left\{ \begin{array}{l} a_{nm} \\ b_{nm} \end{array} \right\} \quad (19)$$

Na (19) para $m \neq 0$.

Uma outra expressão para o potencial gravitacional externo da Terra num ponto P com distância geocêntrica r , co-latidade θ e longitude λ , é dada por Pavlis (1997):

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda) \right], \quad (20)$$

onde o termo a é o raio equatorial de um elipsóide de referência associado com os coeficientes harmônicos esféricos normalizados \bar{C}_{nm} , de grau n e ordem m correspondentes com as expressões (14) e (15) e os harmônicos esféricos de superfície (expressões (10) e (11)) são definidos como:

$$\bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{n|m|}(\cos \theta) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda \\ \sin |m|\lambda \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \text{para } m \geq 0 \text{ e} \\ \text{para } m < 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

A ANÁLISE ESPECTRAL E A TRANSFORMADA DE FOURIER

1. INTRODUÇÃO

Define-se a análise espectral, como o cálculo numérico de um espectro de frequências, a partir do sinal contido numa amostra de dados digitais, por meio do computador. (Wenzel, 1995; Schwab, 1995). O sinal amostrado é uma função no domínio do tempo ou do espaço, sendo que na formulação a seguir, o subscrito t é válido tanto para um como o outro domínio. Nesta apresentação, a análise espectral será abordado do ponto de vista geodésico, para o tratamento específico de dados de gravidade.

O uso da análise espectral em Geodésia, para análise de fenômenos no domínio do tempo, data da década de 1950, porém, o seu uso espalhou-se para outras áreas e aplicações, a partir da aparição da Transformada Rápida de Fourier (FFT- Fast Fourier Transform), na década de 1960. Algumas das razões que justificam o uso do análise espectral e dos filtros digitais em Geodésia, são:

- ↳ Medição de frequências, estimativa da amplitude do sinal e do ruído em observações dependentes do tempo;
- ↳ Uso de filtros digitais para reduzir ruídos em sistemas que adquirem dados temporais;
- ↳ Filtragem anti-aliasing em observações discretas;
- ↳ Uso do teorema da convolução, para resolver fórmulas integrais bi-dimensionais (como a de Stokes), através da multiplicação no domínio das frequências;
- ↳ Filtragem de bandas, para retirar determinados comprimentos de onda das observações.

O uso da FFT e do teorema da convolução de funções, permite reduzir o tempo de processamento e aumentar a capacidade no cálculo das alturas geoidais, enquanto que o cálculo das anomalias residuais no processo de decomposição da altura geoidal (conhecido na literatura inglesa como “remove-restore”), é um exemplo do que seria a aplicação de filtros de banda. A remoção dos longos comprimentos de onda, por meio de um modelo geopotencial, funciona como um filtro “passa-baixa” e a remoção do efeito direto da topografia, pode ser considerado como um filtro “passa-alta”.

2. SÉRIE DE FOURIER

Uma função periódica, com período T , que satisfaz as condições de Dirichlet¹⁹, tal que (Wenzel, 1995),

$$g(t) = g(t+T), \text{ e} \quad (1)$$

$$\int_0^T g(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt, \quad (2)$$

pode ser representada por uma série, denominada de Fourier, com coeficientes a_n e b_n , (também denominados coeficientes de Fourier), da forma

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right], \quad (3)$$

sendo os coeficientes de Fourier, expressos por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt; \quad (4)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt, \text{ para } n=0, 1, 2, \dots\infty. \quad (5)$$

Em forma complexa, a série de Fourier, tem a expressão

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n e^{i\omega_n t}, \quad (6)$$

com frequência cíclica de $\omega_n = \omega_0 n = 2\pi n/T$ e sendo G_n igual a

$$G_n = \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

ou, denominando a frequência de passo $\Delta\omega = 2\pi/T$, a série de Fourier pode ser expressa como a combinação linear de sinusoides complexas, na seguinte fórmula equivalente (Sideris, 1997)

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n e^{i\omega_n t} \Delta\omega \quad (8)$$

Os coeficientes de Fourier, representam o espectro discreto da função, sendo que em forma complexa, estão contidas tanto as frequências positivas como as negativas. As

¹⁹ A função deve ter um número finito de máximos e mínimos no período, assim como um número finito de discontinuidades de caráter finito e ser integrável em todo o período.

componentes espectrais mencionadas na expressão (7), podem ser separadas em uma parte real e uma outra imaginária, da forma

$$G_n = X_n + iY_n \quad (9)$$

A amplitude do espectro é definida por

$$|G_n| = (X_n^2 + Y_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

e a fase espectral por

$$\theta_n = \arctan \frac{Y}{X}. \quad (11)$$

3. TRANSFORMADA DE FOURIER (FT-FOURIER TRANSFORM), FORMA CONTÍNUA

O espectro resultante das funções periódicas é discreto, o que impossibilita a representação de funções não periódicas. Esta limitação, é resolvida fazendo o período da função tender para o infinito (a frequência fundamental tende a zero), tornando a função não periódica e o seu espectro contínuo. Assim, para uma função como a (8), define-se a Transformada de Fourier da forma (Sideris, 1991):

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi i f t} dt = F[g(t)], \text{ e} \quad (12)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{2\pi i f t} df = F^{-1}[G(f)], \quad (13)$$

já que $\omega = 2\pi f$, o fator $1/2\pi$ pode ser omitido, expressando o espectro em função da frequência. Nestas expressões (12) e (13), F e F^{-1} , representam a Transformada de Fourier direta e inversa, respectivamente, também denominados de "par transformado de Fourier", o que é expresso simbolicamente por $g(t) \leftrightarrow G(f)$.

O que pode ser interpretado da informação apresentada até aqui?

A equação (6) mostra que uma função periódica pode ser representada por uma soma de harmônicos com uma determinada frequência fundamental. As funções não periódicas também podem ser representadas por uma soma de harmônicos de frequência fundamental tendendo a zero, como foi visto.

A FT contém informação a respeito da amplitude e da fase dos harmônicos que constituem a função e basicamente é assumido que qualquer função tem duas representações, uma no domínio do tempo ou espaço e uma outra, no domínio das frequências. A FT direta avalia a função espacial no domínio das frequências, em termos de amplitude ou fase, enquanto a FT inversa sintetiza o espectro de frequências para obter a função espacial.

A *convolução* de duas funções é definida como (Sideris, 1997)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) h(t - \tau) d\tau = g(t) * h(t) = h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (14)$$

O teorema da convolução estabelece que o espectro da expressão (14), é o produto dos espectros das duas funções; de forma abreviada:

$$x(t) = g(t) * h(t) \leftrightarrow X(f) = G(f) \cdot H(f). \quad (15)$$

Isto implica que a integral da multiplicação de duas funções no domínio espaço/tempo, corresponde a uma multiplicação de seus espectros no domínio das frequências, o qual é muito conveniente, já que substitui a integração numérica pela multiplicação e adição dos espectros das funções.

O processo da convolução no domínio do espaço inclui quatro passos que são:

- a) espelhar a função $h(\tau)$, com respeito do eixo das ordenadas;
- b) deslocar a função $h(\tau)$ uma quantidade t ;
- c) multiplicar $h(t - \tau)$ por $g(\tau)$;
- d) integrar o resultado, ou seja calcular a área sob o produto das funções.

A Figura 1 ilustra o processo da convolução de duas funções.

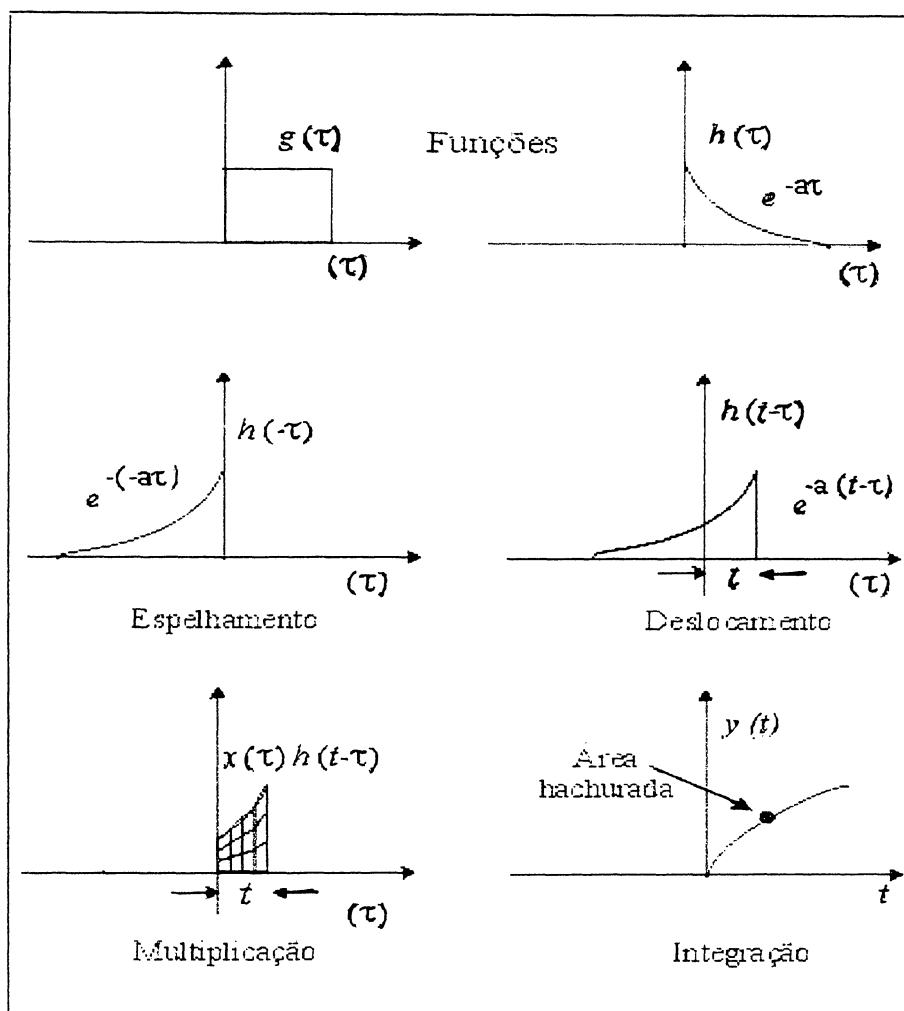


Figura 1. Convolução de duas funções em forma gráfica. (Fonte: modificado de Sideris, 1997)

No domínio das frequências, o processo é melhor entendido. A multiplicação de dois espectros, significa a filtragem de uma função pela outra, sendo que regiões do espectro da primeira, ficam alteradas pelo segundo espectro. É claro agora, que os pesados cálculos numéricos de integrais, podem ser avaliados eficientemente por meio da multiplicação de seus espectros na convolução e o uso da FT. Assim duas F e uma F^{-1} , são simplesmente as operações necessárias para calcular a seguinte convolução das funções:

$$x(t) = g(t) * h(t) = F^{-1}[X(f)] = F^{-1}[G(f) \cdot H(f)] = F^{-1}\{F[g(t)] \cdot F[h(t)]\} \quad (16)$$

4. A FORMA DISCRETA DA FT

Os diversos fenômenos físicos acontecem na realidade, em forma contínua e correlacionada. Os nossos sentidos como os nossos instrumentos, são capazes de captar parte dessa realidade, contaminada aliás com inevitáveis erros de observação e instrumentais.

Diversos procedimentos observacionais e de ajustamento de observações (Gemael, 1994) permitem reduzir estes erros, porém os dados coletados continuam sendo uma amostra parcial da realidade, discreta nos domínio do espaço ou do tempo. Assim, pretende-se representar a continuidade do campo gravimétrico e/ou da superfície topográfica, por meio de amostras espaciais que, dependendo da densidade das amostras e da qualidade de nossa coleta, fornecerão uma representação do fenômeno físico de interesse mais o menos aproximada.

Na aplicação prática da FT, devem-se usar duas aproximações da realidade:

- a integral é substituída por um somatório discreto de dados igualmente espaçados;
- os limites infinitos são substituídos por limites finitos no espaço/tempo.

A amostragem de uma função contínua é descrita em linhas gerais na seqüência. Uma função amostrada com intervalos $\Delta t = T$, pode ser representada como a convolução de uma função contínua $h(t)$ com uma outra função de amostragem $\Delta_0(t)$, da forma $H(f) * \Delta_0(f)$, o que causa a repetição periódica do espectro real. Dependendo de T , a periodicidade pode ocasionar sobreposição do espectro, introduzindo o erro denominado de "aliasing". Estendendo o limite da função a um tamanho T_0 , com M pontos amostrais, o espectro resultante da convolução fica discreto, mas um outro erro denominado de "leakage"²⁰ é introduzido. Finalmente as amostras são tomadas do espectro discreto, através de uma multiplicação no domínio das freqüências com espaçamento $\Delta f = 1/T_0$, o que causa a repetição da função no domínio espacial. Desta forma a função é discreta em ambos domínios. A Transformada Discreta de Fourier (DFT-Discrete Fourier Transform), é calculada em ambos domínios por (Schwarz et al, 1990):

$$H(m\Delta f) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k\Delta t) e^{-i2\pi k \Delta t m \Delta f} \Delta t = \sum_{k=0}^{M-1} h(k\Delta t) e^{-i2\pi k m/M} \Delta t \quad (17)$$

$$h(k\Delta t) = \sum_{m=0}^{M-1} H(m\Delta f) e^{i2\pi k \Delta t m \Delta f} \Delta f = \sum_{m=0}^{M-1} H(m\Delta f) e^{i2\pi k m/M} \Delta f \quad (18)$$

Na forma discreta, as funções têm como argumentos no domínio do espaço, os comprimentos de onda $t_k = k\Delta t$ ou os números de onda k e no domínio das freqüências, $f_m = m\Delta f$ ou simplesmente m . Assim, o par da DFT pode-se abreviar das três seguintes formas:

²⁰ Espectralmente, o erro de "leakage" introduz um espalhamento no pico da frequência principal, aparecendo lóbulos em ambos os lados. Uma das formas de reduzi-lo é a través de filtro de janela retangular. (Schwab, 1995)

$$h(k\Delta t) \leftrightarrow H(m\Delta f), \text{ ou } h(t_k) \leftrightarrow H(f_m) \text{ ou } h(k) \leftrightarrow H(m) \quad (19)$$

O período T_0 , a frequência periódica F_0 , a resolução espacial Δt , a resolução da amostragem Δf e o número de amostras discretas M , apresentam as seguintes relações:

$$T_0 = \frac{1}{\Delta f} = M\Delta t, \text{ e} \quad (20)$$

$$F_0 = \frac{1}{\Delta t} = M\Delta f \quad (21)$$

Estas equações apresentadas, mostram que existem frequências máximas e mínimas (comprimentos de onda mínimos e máximos) que podem ser extraídos através da DFT. Além destes limites, as frequências não podem ser recuperadas, devido aos erros de "aliasing" e "leakage" introduzidos. A frequência máxima recuperada, denominada de Frequência Crítica de Nyquist, é $F_0/2$ e depende de Δt (teorema da amostragem de Shanon²¹), sendo expresso por

$$|f_{Ny}| = \pm \frac{F_0}{2} = \pm \frac{1}{2\Delta t}. \quad (22)$$

O erro de "aliasing", pode ser minimizado amostrando a função tão densamente quanto possível, devendo-se selecionar a amostragem de tal forma que $1/2\Delta t$ seja maior que a maior frequência presente nos dados. O problema acontece quando não é possível selecionar a resolução, como acontece em dados de gravidade ou topográficos.

A solução com dados de gravidade é remover a informação de alta frequência, por exemplo reduzindo as anomalias por efeito de relevo, usando uma malha de altitudes médias com uma resolução maior que a resolução dos dados gravimétricos.

O erro de "leakage" em gravimetria, é minimizado removendo a informação de baixa frequência, por exemplo com um modelo geopotencial de alto grau.

4.1 A CONVOLUÇÃO DISCRETA E A CIRCULAR

A discretização de (14), para M pontos, resulta na seguinte expressão para a convolução discreta:

$$x(k) = \sum_{n=0}^{M-1} g(n) h(k-n) \Delta t = g(k) * h(k), \quad (24)$$

sendo avaliada por somatório numérico, o resultado é idêntico à convolução linear. Se a expressão discreta (16) for usada na forma

²¹ Shanon (1948) citado em (Schwab, 1995), mostrou que o intervalo de amostragem deve ser tal, que a frequência máxima contida no sinal, seja menor do que a frequência crítica de Nyquist, ou seja $f_{\max} < f_{Ny} = 1/2 \Delta t$.

$$x_p(k) = g_p(k) * h_p(k) = F^{-1}[X_p(m)] = F^{-1}[G_p(m) \cdot H_p(m)] = F^{-1}\{F[g_p(k)] \cdot F[h_p(k)]\}, \quad (25)$$

as duas funções são tratadas como periódicas (subscrito P), e os resultados são incorretos, correspondendo a uma convolução circular (função periódica) e não linear, introduzindo erros denominados "erros na borda ou nos limites". A maioria dos programas de cálculo de convoluções corresponde à convolução circular e não à linear. Uma forma de usar a convolução circular e produzir resultados iguais à convolução linear, é através do procedimento denominado "zero padding", que consiste em adicionar zeros a $g(k)$ e $h(k)$, como:

$$g'(k) = \begin{cases} g(k), & 0 \leq k \leq M \\ 0, & M \leq k \leq 2M \end{cases} \quad \text{e} \quad h'(k) = \begin{cases} h(k), & 0 \leq k \leq M \\ 0, & M \leq k \leq 2M \end{cases} \quad (26)$$

Os passos necessários para avaliar a convolução circular com este método, são:

- 1) formar $g'(k)$ e $h'(k)$;
- 2) calcular $G'(m)$ e $H'(m)$ via a DFT;
- 3) calcular o produto dos espectros, $X'(m) = G'(m) \cdot H'(m)$;
- 4) calcular $x'(k)$ no domínio espacial, através da inversa da DFT, aplicada a $X'(m)$.

Como consequência, $x'(k)$ possui $2M-1$ amostras e é exatamente igual a $x(k)$, devido à ausência do erro de "aliasing". A Figura 2, apresenta outra variação do método para o uso com a integral de Stokes, sugerido por Sideris (1997). Neste método são adicionados 100% de zeros na quadrícula do sinal gravimétrico e na área da função núcleo, sendo que a convolução é calculada sobre a área completa. Assim, são comparados os espectros obtidos para um ponto central e outro na borda da área de cálculo, pelos seguintes procedimentos:

- a) espectro da solução por integração numérica, considerada como solução padrão;
- b) convolução circular sem "zero padding" (veja o espectro do núcleo, resultando diferente ao anterior);
- c) convolução circular com "zero padding" nas anomalias gravimétricas e no núcleo da função. A área de cálculo é a original para ambos espectros;
- d) convolução circular com "zero padding" apenas nas anomalias gravimétricas e cálculo do núcleo da função em toda a área

Note-se que as soluções (a) e (d) são iguais. Intensivos testes e comparações tem mostrado a necessidade de usar esta técnica (Tziavos, 1996), e será usada neste trabalho para contornar os problemas da convolução circular.

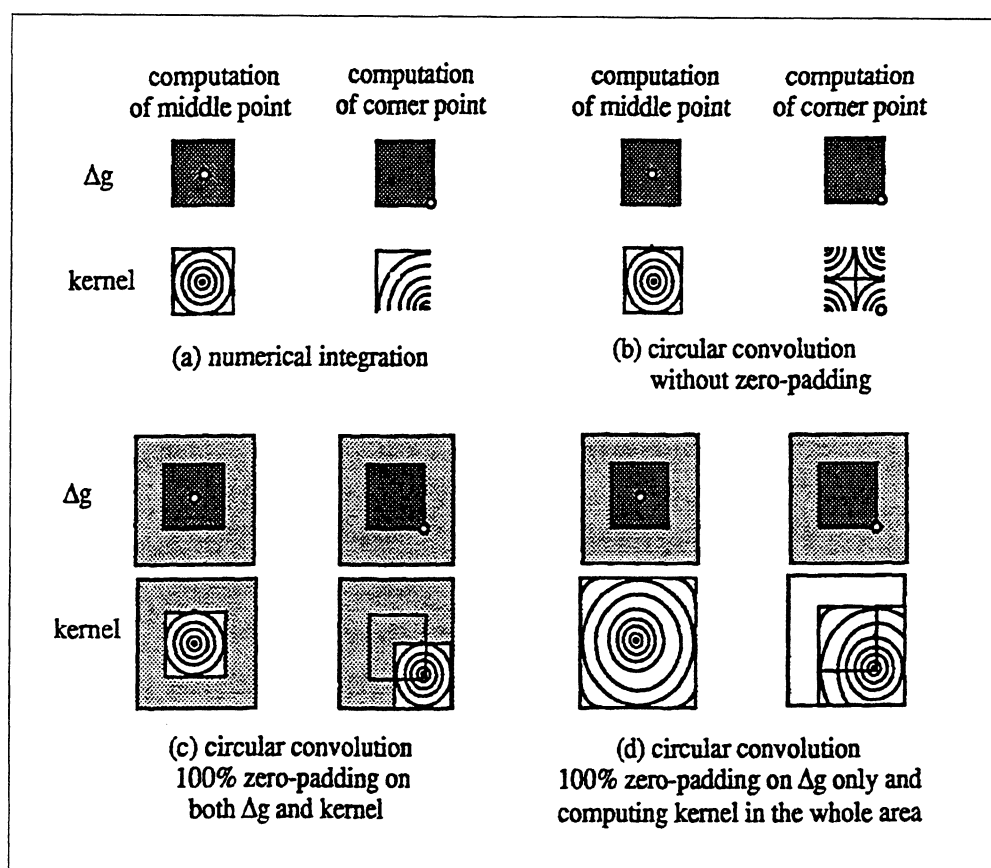


Figura 2. Efeitos de uma convolução circular na função de Stokes, com método de "zero padding". Fonte: (Sideris, 1991)

4.1.2 A Transformada Rápida de Fourier

A DFT, requer um grande número de passos computacionais para o seu cálculo. Para M observações, são necessárias M^2 chamadas a cada função seno e coseno. Assim, foi desenvolvido um método para reduzir o esforço computacional, denominado de Transformada Rápida de Fourier (FFT- Fast Fourier Transform). A FFT, divide uma série de M dados, em duas séries com $M/2$ dados. Se M é uma potência de 2, o procedimento pode ser repetido até que o comprimento da série seja 1.

Este procedimento reduz não apenas o número de multiplicações, mas também o número de adições necessárias, o que produz uma significativa diminuição do tempo de processamento. O número de operações com a FFT, é de aproximadamente $M \log_2 M$. Os resultados da FFT são idênticos aos da DFT, mas os dados tem que ser $M=2^k$. Para aplicar a

FFT em séries de qualquer comprimento, as séries são alongadas adicionando m_s zeros de forma que:

$$M = m + m_s = 2^k, \quad (27)$$

Esta é a técnica já apresentada de “zero padding”, aplicada sobre uma série de comprimento qualquer.

4.2 A TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER MULTI-DIMENSIONAL

A FFT contínua pode ser estendida, para incluir um maior número de dimensões. Assim, as variáveis t e f , passam a serem vetores, incluindo por exemplo as coordenadas bi ou tridimensionais, no domínio do espaço e da frequência. No caso tridimensional, as definições dos vetores são:

$$\vec{t}^P = (x, y, z)^T = (\varphi, \lambda, h)^T; \vec{f}^P = (u, v, w); \vec{f}^T \vec{t}^P = ux + vy + wz, d\vec{t}^P = dx dy dz \text{ e } d\vec{f}^P = du dv dw,$$

onde u, v, w são as frequências correspondentes às coordenadas x, y, z (ou suas equivalentes geodésicas). A FFT multi-dimensional, pode ser dividida em consecutivas FFT unidimensionais (1DFFT-One Dimensional Fast Fourier Transform), aplicadas sucessivamente, sendo válidas todas as propriedades que lhe pertencem.

Na forma discreta, o par de DFT de duas dimensões (2DFFT) de uma função $h(\varphi, \lambda)$, dada em $M \times N$ pontos, na área $E_\varphi \times E_\lambda$ e com espaçamento $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$, é definido por

$$H(u_m, v_n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(\varphi_l, \lambda_k) e^{-i2\pi(mk/M + nl/N)} \Delta\varphi \Delta\lambda, \quad (28)$$

$$h(\varphi_l, \lambda_k) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} H(u_m, v_n) e^{i2\pi(mk/M + nl/N)} \Delta v \Delta u \quad (29)$$

onde os intervalos de espaçamento no domínio do espaço e das frequências, é definido como:

$$\Delta u = \frac{1}{E_\lambda} = \frac{1}{M \Delta \lambda}, \quad \Delta v = \frac{1}{E_\varphi} = \frac{1}{N \Delta \varphi} \quad (30)$$

$$\Delta \lambda = \frac{1}{F_u} = \frac{1}{M \Delta u} = \frac{1}{2u_{Ny}}, \quad \Delta \varphi = \frac{1}{F_v} = \frac{1}{N \Delta v} = \frac{1}{2v_{Ny}},$$

onde u_{Ny} e v_{Ny} , são as Frequências de Nyquist correspondentes a λ e φ respectivamente.

A Figura 3, apresenta graficamente a distribuição dos dados em ambos domínios.

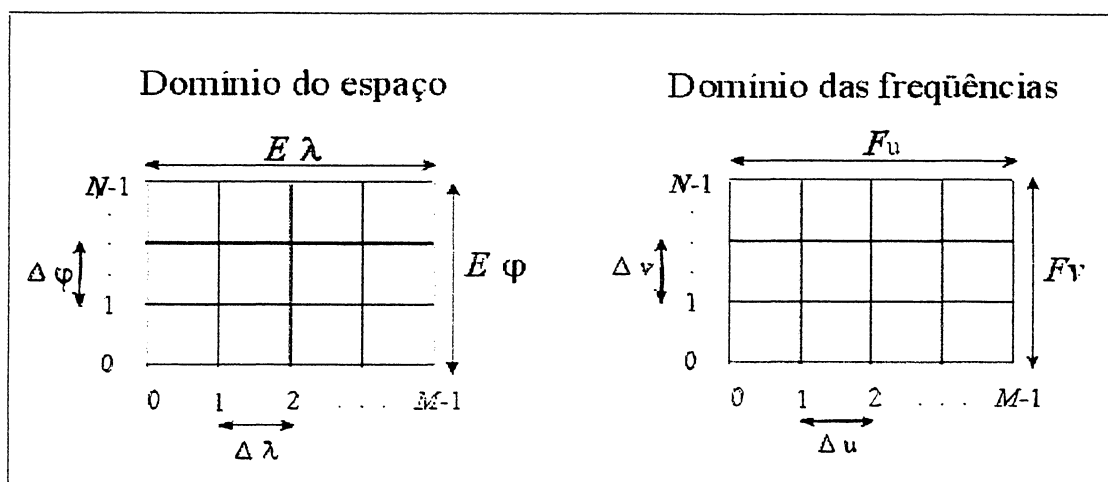


Figura 3. Quadricula de amostras na Transformada Discreta de Fourier bidimensional (2DFFT-Two Dimensional Fast Fourier Transform).

ANEXO III

PROGRAMAS USADOS

1. Descrição geral

PROGRAMAS	SIST. OPERACIONAL E LINGUAGEM	DESCRIÇÃO
2.1 <i>Gravt_gm</i>	DOS, FORTRAN 77	Autor: Ye Cai. Li. Versão 1994. Calcula Δg , δg , ξ , η , e N a partir de um conjunto de harmônicos esféricos de um modelo geopotencial especificado.
2.2 <i>fftgeoid</i>	DOS, FORTRAN 77	Autor: Y. Li. Versão 1994. Calcula uma malha de alturas geoidais, a partir de anomalias da gravidade, através da fórmula de Stokes, usando a FFT.
2.3 <i>tc</i>	DOS, FORTRAN 77	Programador: Rene Forsberg, Ohio State University / Danish Geodetic Institute, Julho de 1983. Versão original descrita no Reporte 355, 1984 da Ohio State University, Dept. of Geodetic Science and Surveying, última modificação em 1996. Este programa calcula os efeitos da topografia em várias quantidades gravimétricas e usando diferentes aproximações, como: o efeito total do relevo topográfico, reduções topográfico/isostáticas, usando o modelo de Airy-Heiskanen, correção gravimétrica do terreno (a denominada <i>correção clássica de terreno</i> , ou seja o efeito irregular da topografia, respeito do plateau esférico de Bouguer); efeitos de um Modelo de Terreno Residual (MTR). Os resultados do programa podem ser fornecidos na forma de alturas geoidais, deflexões da vertical, distúrbio da gravidade ou gradientes da gravidade em m, segundos de arco, mGal ou unidades de Eötvös, respectivamente.

<i>2.4 tcfour</i>	DOS, FORTRAN 77	Autor: René Forsberg, 1984, última modificação em Dezembro de 1995. É um programa para análise de modelos digitais de terreno via FFT. Pode ser usado para: filtragem de dados, calculo da função de covariância e potência espectral de um arquivo; calcular o efeito direto do relevo topográfico, efeitos residuais do relevo, efeito indireto do relevo devido ao método de condensação, para uma topografia residual, efeitos isostáticos diretos e indiretos e efeitos residuais do relevo nas deflexões da vertical.
<i>2.5 tc2dftpl</i>	DOS, FORTRAN 77	Autor: Y. Li. Versão 1994. Calcula uma malha de correções clássicas de terreno, em aproximação plana, a partir de uma quadrícula de altitudes e usando a FFT
<i>2.6 ind</i>	DOS, FORTRAN 77	Autor: não identificado, sem data. Usa uma malha de altitudes para calcular o efeito indireto na forma plana e mediante a FFT do efeito causado pelo uso do segundo método de condensação de Helmert, nos cálculos do geóide,.
<i>com_data</i>	DOS, FORTRAN 77	Autor: Y. Li. Versão 1993. Calcula a soma ou diferença de duas malhas e produz as estatísticas em termos de valor máximo, mínimo, média desvio padrão e erro médio quadrático, do resultado total e individual por arquivo.
<i>int</i>	DOS, FORTRAN 77	Autor: Y. Li. Versão 1992. Interpola dados em retículas, para estimar resultados em pontos arbitrários
<i>geogrid</i>	DOS, FORTRAN 77	Autor: R. Forsberg. Versão 1991. Calcula malhas de pontos, a partir de dados isolados, pode-se escolher o sinal ruído e a distância de correlação entre os dados.

2.7 <i>geopgrid</i>	DOS, FORTRAN 90	Autor: Georg Wenzel, 1985. Última modificação em 1998. Calcula, a partir dos coeficientes de um modelo geopotencial (máximo grau de 720) várias quantidades do potencial perturbador (anomalias de altitude, distúrbio de gravidade, anomalias de gravidade, deflexões da vertical ou componentes do tensor gravitacional). A saída é em forma de malhas e não inclui o sistema geodésico WGS84.
Compilador <i>Fortran Lahey 90</i>	Windows 95/98/NT	Lahey, 1997. Edição, modificação e compilação de programas na linguagem Fortran.
Compilador <i>Fortran Lahey 77</i>	DOS	Lahey, 1991. Criação, edição, modificação e compilação de programas na linguagem Fortran.
<i>surfer 7.0</i>	Windows 95/98/NT	Golden Software Inc., 1999. Elaboração de Figuras, conversão de formato de arquivos
<i>office 97</i>	Windows 95/98/NT	Microsoft Corporation, 1997. Redação da tese e a sua apresentação. Estatísticas e Figuras relacionadas
<i>Smartdraw 2.0</i>	Windows 95/98/NT	SmartDraw Software Incorporated, 1995. Criação de Figuras

2. DESCRIÇÃO DETALHADA

Nesta seção, é oferecida uma descrição detalhada de alguns dos principais programas usados no trabalho.

2.1 O PROGRAMA *gravt_gm*

O programa calcula os seguintes parâmetros da gravidade

- Altura geoidal, N ;
- Anomalia de gravidade, Δg ;
- Distúrbio da gravidade, δg ;
- Deflexões da vertical, ξ , η ,

dado um modelo geopotencial qualquer.

Os valores são calculados acorde as seguintes opções:

- 1) em pontos aleatórios a partir do teclado;

Fórmulas de cálculo:

$$N = 1/(4\pi\gamma) \sum \Delta g * S(\psi), \text{ sendo } S(\psi) = 1/s - 4 - 6s + 10s^2 - (3 - 6s^2) \ln(s + s^2)$$

$$\text{e nesta aproximação: } s^2 = \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos(\psi_m).$$

5) Formula de Stokes para a esfera, com núcleo original (através da 1DFFT).

Fórmulas de cálculo:

$$N = 1/(4\pi\gamma) \sum \Delta g * S(\psi), \text{ sendo:}$$

$$S(\psi) = 1/s - 4 - 6s + 10s^2 - (3 - 6s^2) \ln(s + s^2)$$

$$\text{e nesta aproximação } s^2 = \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos(\psi_p) \cos(\psi_q).$$

Funções internas do programa:

Gamma(γ) gravidade normal no elipsóide, na latitude γ ;

Er(γ) distância entre o centro do elipsóide e o ponto de cálculo de latitude γ .

Variáveis do programa:

MAXi0 máximo número de linhas, da malha de anomalias gravimétricas;

MAXj0 máximo número de colunas, da malha de anomalias gravimétricas;

N0bi número de zeros adicionados antes da primeira linha
(exemplo, antes de $\Delta g(1, j)$);

N0bj número de zeros adicionados antes da primeira coluna
(exemplo, antes de $\Delta g(i, 1)$);

MAXi máximo número de linhas, depois de adicionar os zeros;

MAXj máximo número de colunas, depois de adicionar os zeros;

phi_cp latitude no ponto de cálculo;

phi_rp latitude no ponto de integração;

i_begin, i_end limites de integração, simétricos ao ponto central de integração;

j_begin, j_end limites de integração, simétricos ao ponto central de integração;

dy_km espaçamento da quadrícula entre duas linhas vizinhas;

dx_km espaçamento da quadrícula entre duas colunas vizinhas. Quando é usada a forma plana de Stokes, a unidade é o km, nos outros casos é o radiano;

phi0 latitude do primeiro ponto no arquivo de dados;

phimean latitude média da área de cálculo.

Parâmetros a definir no programa:

MAXrow,	máximo número de linhas e colunas respectivamente, da matriz de
MAXclm	anomalias gravimétricas;
MAXrows,	máximo número de linhas e colunas para o uso da técnica de 100% zero-
MAXclms	padding, com a seguinte relação:
$\text{MAXrows} = 2 * \text{MAXrow}, \text{MAXclms} = 2 * \text{MAXclm};$	
NMAX	o tamanho do vetor unidimensional a ser processado pela FFT;
Ea	semi-eixo major do elipsóide em km (por defeito GRS80);
Eb	semi-eixo menor do elipsóide em km (por defeito GRS80);
Ge	gravidade normal no equador do elipsóide (por defeito GRS80);
Ga1	alfa1 da fórmula teórica da gravidade (por defeito GRS80);
Ga2	alfa2 da fórmula teórica da gravidade (por defeito GRS80);

Chaves:

K_kernel	indica que fórmula e núcleo serão usados;
K_header	indica o tipo de informação da primeira linha do arquivo de dados;
K_radius	especifica o raio de integração;
K_dgNSWE	indica se a matriz está ordenada em linhas norte-sul ou sul-norte;
K_system	especifica o sistema operativo do processador (PC-DOS ou UNIX).

Matrizes:

GN (MAXrow, MAXclm)	usada para entrada de anomalias da gravidade e salvar as alturas geoidais calculadas;
Fkernel (MAXrows, MAXclms)	matriz de trabalho bidimensional e complexa;
Fdg (MAXrows, MAXclms)	matriz de trabalho bidimensional e complexa.

Subrutinas:

GEOID	chave que controla o processo de cálculo;
KERNEL	decide a fórmula e núcleo que será usada no cálculo;
ASTOKES	usa a fórmula de Stokes aproximada;
RSTOKES	usa a fórmula de Stokes rigorosa;
GRAVITY	Armazena os dados principais do arquivo de entrada (No. de linhas e

	colunas, espaçamento, limites do reticulado, etc.,
RADIUS	determina o raio de integração;
FGRAVITY	lê as anomalias da gravidade e as transforma em dados complexos;
RSKPDG	usa o núcleo esférico rigoroso na fórmula de Stokes;
ASKPDG	Usa o núcleo esférico aproximado na fórmula de Stokes;
APKMDG	fórmula de Stokes para o plano, com valores de anomalias médias da gravidade como dados de entrada;
APKPDG	fórmula de Stokes para o plano, com pontos de anomalias da gravidade como dados de entrada;
CREPLA	deslocamento no domínio das frequências;
VAR_N_ASK	erro propagado via a fórmula de Stokes;
VAR_ASK1	erro propagado, via o núcleo esférico aproximado;
VAR_ASK2	erro propagado, via o núcleo esférico rigoroso da fórmula de Stokes;
FFT3D	subrotina de controle da FFT multidimensional;
FFTCC	a subrotina executa uma FFT unidimensional.

2.3 O PROGRAMA *tc*

Este programa calcula os efeitos da topografia em várias quantidades gravimétricas e usando diferentes aproximações, como:

- 1) Efeito total do terreno, gerado por todas as massas topográficas sobre o nível médio do mar e assumindo uma densidade da crosta constante;
- 2) Reduções topográfico/isostáticas, usando o modelo de Airy-Heiskanen;
- 3) Correção gravimétrica do terreno (denominado de *correção clássica de terreno*, é o efeito das irregularidades da topografia, respeito do plateau esférico de Bouguer). Neste caso, os resultados são fornecidos com inversão de sinal, de forma de ser diretamente adicionados às observações;
- 4) Efeitos de um Modelo de Terreno Residual (MTR), ou seja os efeitos das irregularidades da topografia, respeito de uma superfície média escolhida.

Os resultados do programa podem ser fornecidos em forma de alturas geoidais, deflexões da vertical, distúrbio da gravidade ou gradientes da gravidade em m, segundos de arco, mGals ou unidades de Eötvös, respectivamente.

Os cálculos estão baseados em dois MTD, um detalhado e um outro grosseiro, os quais são usados na zona interior e exterior do ponto respectivamente. No caso de serem desejados efeitos residuais de terreno, deve-se adicionar uma malha de altitudes médias (por exemplo de 30' x30'). As coordenadas dos dados podem ser geográficas ou UTM, mas todos os dados devem estar no mesmo sistema. Os pontos com altitude desconhecida devem conter o valor 9999, não sendo calculados efeitos neles. As malhas dos MTD devem possuir bordes comuns e estar armazenadas as linhas no sentido norte a sul e as colunas no sentido oeste a leste.

A integração dos efeitos é feita usando as fórmulas para levar em consideração os efeitos gravitacionais de um prisma retangular homogêneo. Dependendo da geometria e acurácia, diversas fórmulas são usadas: fórmulas exatas, desenvolvimentos de harmônicos esféricos (fórmula de Mc Millan), ou ainda uma fórmula aproximada usando uma massa pontual centrada. Estas opções são fixadas na subrotina "prism1" do programa.

O cálculo do efeito pode ser estendida até uma distância fixa ou sobre toda uma área de interesse, levando em consideração a curvatura terrestre apenas até a primeira ordem. O MTD detalhado, é usado até um raio especificado, que deve ser ao menos duas vezes o espaçamento da MTD grosseiro. Na vizinhança do ponto, a informação topográfica é densificada usando um interpolador "spline" bi-cubico.

Parâmetros de entrada:

- nome do arquivo de coordenadas das estações a serem calculados os efeitos;
- nome do arquivo de arquivo com quadrícula de dados topográficos detalhados;
- nome do arquivo de arquivo com quadrícula de dados topográficos com maior espaçamento;
- nome do arquivo de arquivo com quadrícula de altitudes médias (para MTR);
- nome do arquivo de arquivo de saída
- parâmetros: itype, ikind, izcode, istyp, rho;
- lat1, lat2, long1, long2;
- raio1, raio2

sendo:

itype:

- 1 distúrbio da gravidade (δg), em mGal;
- 2 deflexões da vertical (ξ, η), em segundos de arco;
- 3 altura geoidal (ou anomalia de altura) (N, ζ), em m;

- 4 opções 1 + 2, em mGal e segundos de arco, respectivamente;
- 5 anomalias de gravidade, subtraído o efeito indireto do método de condensação de Helmert (Δg - efeito indireto) em mGal.;
- 6 opções 2 + 3, em segundos de arco e mGal, respectivamente;
- 7 gradiente vertical de gravidade, t_{zz} - (z com sinal positivo) em unidades Eötvös;
- 8 gradientes de gravidade, t_{xx} , t_{yy} , t_{zz} em unidades Eötvös;;
- 9 todos os gradientes anteriores em unidades Eötvös.

ikind:

- 1 efeito topográfico;
- 2 efeitos isostáticos;
- 3 correção de terreno;
- 4 efeitos residuais de terreno;
- 5 efeitos residuais de terreno, usando correções de terreno calculadas previamente até a distância "rtc" em km.

izcode:

- 0 estação sobre o terreno, mudar a altitude da estação;
- 1 efeitos isostáticos;
- 2 estação sobre o terreno, mudar o MTD;
- 3 estação sobre o terreno, mudar o MTD apenas nos pontos terrestres;
- 4 estação livre, não densificar

istyp:

- 0 sem arquivo do pontos de entrada, calcule uma malha como saída;
- 1 calcule os efeitos no arquivo de pontos de entrada;
- 2 adicione os efeitos ao valor no arquivo de pontos de entrada;
- 3 subtrair os efeitos ao valor no arquivo de pontos de entrada;
- 4 arquivo de pontos em formato KMS (caracteres em 80 colunas).

lat1, lat2, long1, long2: máxima área para os quais os efeitos de terreno são calculados.

raio1: distância mínima de cálculo para a zona interior (km).

raio2: máxima distância de cálculo (km). Se $r2 = 0$, não é usada a malha grosseira

O arquivo de coordenadas dos pontos a calcular é um arquivo *ascii*, contendo em cada linha : N^o, latitude, longitude e altitude.

Para a opção de saída em forma de malha, a área de cálculo é definida pelos limites: latitudes, "latmin" a "latmax" e longitudes 'longmin' a "longmax", com espaçamento "dlat" e "dlong" especificados em graus.

2.4 O PROGRAMA *tcfour*

É um programa para análise de modelos digitais de terreno por FFT. Na análise é usada uma sub-área da quadrícula, denominada 'dtmfile1'. Esta sub-área, é determinada através do seu extremo sul-oeste (φ, λ) e o número de pontos na direção norte e leste ('in' e 'ie'). No caso de efeitos residuais do relevo, deve subtrair-se uma altitude média de referência.

Entradas do programa:

- dtmfile1 (arquivo com o modelo digital número 1);
- dtmfile2 (arquivo com o modelo digital número 2);
- ofile, (arquivo de saída);
- mode, lref, dist1, dist2 ou altitude,
- fic1, lac1, in1, ie1
- fic2, lac2, in2, ie2 (apenas para o mode = 2)

sendo 'mode' que determina a função do programa, com as seguintes opções:

- 0 opera simplesmente como um filtro, com 'dist1' dando o comprimento da onda em km. Se 'dist2' > 0, tem-se um filtro de passa baixa e se , 'dist2' < 0, o filtro é de passa alta;
- 1 calcula a função de covariância e a potência espectral da malha de entrada;
- 2 efeito direto do relevo topográfico (correção clássica de terreno), usando a quadrícula 1 até a distância 'dist1' e a quadrícula 2, até a 'dist2' (km);
- 3 efeito direto do relevo topográfico (correção clássica de terreno), da 'dist1' a 'dist2' (km);
- 4 efeitos residuais do relevo topográfico, calculados como efeito direto com a redução de Bouguer à nível de referência até 'dist1';
- 5 efeito indireto do relevo topográfico devido ao método de condensação de Helmert, para uma topografia residual. Os efeitos são calculados até uma distância 'dist2' e num raio 'dist1' (km).

- 6 efeitos isostáticos indiretos, devido ao método de condensação de Helmert, na distância 'dist2' sobre o geóide;
- 7 efeitos isostáticos diretos devido ao método de condensação de Helmert;
- 8 efeitos residuais do relevo topográfico nas deflexões da vertical.

O programa reconhece as quadrículas em coordenadas UTM, pelo cabeçalho do arquivo 'dtmfile1'.

2.5 O PROGRAMA *tc2dftpl*

Programa que calcula os efeitos diretos do relevo via FFT, seja usando um modelo prismático ou colunar da topografia.

Parâmetros a definir:

Max_ROWxCLM	multiplicação do número máximo de linhas pelo número máximo de colunas;
MaxSubs	tamanho máximo da matriz complexa bidimensional, depois do 100% zero-padding.

Subrotinas usadas:

DTDZ_2D1	calcula as convoluções uma a uma;
DTDZ_2D2	calcula 2 convoluções simultaneamente;
S2DK_TxTyTz	calcula a função do núcleo para os gradientes de primeira ordem (T_x , T_y e T_z) do potencial gravitacional da topografia;
TCMP0T	calcula o temo de zero grau do efeito do relevo, ou seja a atração do plateau de Bouguer;
IFTAFB	calcula a FFT de B; multiplica A pela $F\{B\}$ e calcula a inversa da FFT de $A \times F\{B\}$.

Os arquivos de saída (extensão **.mp**, para o modelo prismático e **.ml** para o modelo de colunas), para os efeitos diretos do relevo, até a primeira, segunda ou terceira ordem são respectivamente:

tc2dft1.

tc2dft2.

tc2dft3.

2.6 O PROGRAMA *ind*

O programa calcula o efeito topográfico indireto na altura geoidal, devido ao uso do segundo método de condensação de Helmert na topografia. A fórmula implementada no programa é:

$$\delta N = \delta N_0 + \delta N_1 + \delta N_2, \text{ sendo}$$

$$\delta N_0 = \frac{-\pi G \rho h^2}{\gamma};$$

$$\delta N_1 = \frac{G \rho}{\gamma} \left[\int \frac{h - h_p}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_m^2}} dx dy - \int \frac{h - h_p}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \right];$$

$$\delta N_1 = -\frac{G \rho}{6\gamma} \left[\int \frac{h^3 - h_p^3}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + h_m^2}\right)^3} dx dy \right] + \frac{G \rho h_m^2}{2\gamma} \left[\int \frac{h - h_p}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + h_m^2}\right)^3} dx dy \right],$$

h_m , é a altitude média da área de cálculo. δN_0 , é a parte regular ou normal e $\delta N_1 + \delta N_2$, a parte irregular da fórmula. Os resultados dos diferentes termos e a sua suma, são armazenados respectivamente nos arquivos de saída **indrt0.dat**, **indrt1.dat**, **indrt2.dat** e **indrt.dat**.

O arquivo de altitudes de entrada, deve estar na forma de malha e conter um cabeçalho, especificando os limites da área e o espaçamento em cada eixo dos dados em minutos, da forma: lat1, lat2, long1, long2, Δlat, Δlong

O programa solicita a distância em km, até a qual serão considerados os efeitos da topografia

2.7 O PROGRAMA *geogrid*

O programa calcula diversos parâmetros do campo da gravidade, na forma de quadrículas, a partir de um modelo do potencial gravitacional terrestre em harmônicos esféricos. A versão está restringida ao máximo grau e ordem de 720, para desenvolvimentos maiores devem mudar-se os parâmetros das sentenças, nas rotinas GEOGFA e GEOLNFD.

A malha está, em dois arquivos ascii: um com extensão **.hed**, contendo os parâmetros da mesma e um outro **.grd**, com apenas um registro por latitude, começando pela esquina sudoeste da quadrícula. Os parâmetros de controle, são inseridos através de um arquivo de entrada, denominado **geopgrid.ini**.

O parâmetro do campo da gravidade a ser calculado, é definido na variável ITYPE, no arquivo de entrada, tendo as seguintes opções:

- 1 Anomalia de altura / altura geoidal;
- 2 Distúrbio da gravidade;
- 3 Anomalia ar-livre de gravidade;
- 4 Deflexão vertical, componente norte-sul;
- 5 Deflexão vertical, componente leste-oeste;
- 6 Componente T_{xx} do tensor de Eötvös;
- 7 Componente T_{xy} do tensor de Eötvös;
- 8 Componente T_{xz} do tensor de Eötvös;
- 9 Componente T_{yy} do tensor de Eötvös;
- 10 Componente T_{yz} do tensor de Eötvös;
- 11 Componente T_{zz} do tensor de Eötvös;

Descrição dos arquivos usados pelo programa:

- geopgrid.ini.** Arquivo de parâmetros de controle a serem estabelecidos previamente à execução do programa;
- geopgrid.prn** Arquivo de impressão de resultados;
- cmodf** Arquivo para armazenar os coeficientes plenamente normalizados do modelo do geopotencial, antes da execução do programa. O nome do modelo é uma das variáveis do programa **geopgrid.ini**;
- cfilegrd** Nome do arquivo que armazena o parâmetro calculado;
- cfilhed.** Arquivo com o cabeçalho da quadrícula gerada pelo programa.

Subrotinas usadas:

- GEOADM** Estima a variância da anomalia gravimétrica, calculada com o modelo geopotencial, referida a um elipsóide médio (radio 6371 km) e usando dois modelos de variâncias-covariâncias diferentes, Tscherning & Rapp (1994) e Jekeli (1978);
- GEOBET** função Beta damping;
- GEOCOE** calcula o erro por inclusão e por omissão devido ao truncamento do modelo do geopotencial ao grau n ;
- GEOCTR** calcula a transformação das coordenadas;
- GEOEXT** calcula e imprime o tempo de execução de cada etapa do cálculo;

GEOGAM	calcula a gravidade normal, baseado no sistema de referência geodésico escolhido;
GEOGFA	calcula os parâmetros do campo de gravidade através do geopotencial;
GEOHIS	calcula o histograma dos cálculos;
GEOREF	calcula os diferentes parâmetros do sistema geodésico de referência.
GEONLFD	calcula os harmônicos esféricos plenamente normalizados;